

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
INFORMATIKAI KAR
TÉRKÉPTUDOMÁNYI ÉS GEOINFORMATIKAI TANSZÉK

KERKOVITS KRISZTIÁN ANDRÁS

Vetületi torzulások optimalizálása földrajzi térképeken

Doktori értekezés

ELTE TTK FÖLDTUDOMÁNYI DOKTORI ISKOLA
Vezetője: Dr. Bartholy Judit, DSc, egyetemi tanár

TÉRKÉPÉSZET DOKTORI PROGRAM
Vezetője: Dr. Zentai László, DSc, egyetemi tanár

Témavezető:
Dr. Klinghammer István
DSc, professor emeritus
ELTE IK Térképtudományi és Geoinformatikai Tanszék



Budapest, 2018.

Tartalomjegyzék

Ábrák jegyzéke	v
Táblázatok jegyzéke	vii
Fontosabb jelölések	viii
Köszönetnyilvánítás	xi
Előszó	xii
I. Vetülettani fogalmak	1
I.1. A térképvetület fogalma	1
I.2. A vetület torzulásai	3
I.2.a. A torzulási arány	3
I.2.b. A torzulási modulus	5
I.2.c. A torzultság	8
I.2.d. A véges torzultság	10
I.3. Nem affin torzulások a vetületben	11
I.3.a. Görbültség és ferdültség	11
I.3.b. A görbültség és ferdültség számítása, tulajdonságai	12
I.3.c. A másodrendű torzulások szemléltetése	15
I.3.d. Másodrendű torzultság	18
I.4. A vetületek csoportosítása, a legjobb kartográfiai vetület fogalma .	19
II. A vetületi torzulások hatása a térkép olvasójára	21
II.1. A vetületek és a térképolvasás	21
II.2. A kutatás menete	22
II.2.a. A kérdőív	22
II.2.b. Adatgyűjtés	23
II.2.c. Statisztikai feldolgozás	24
II.3. Feladatok szerinti bontás	26
II.3.a. Területtorzulás	26
II.3.b. Meridiánkonvergencia	27

II.3.c. Szakadások az ellenmeridiánon	29
II.3.d. Szakadások a térkép belsejében	31
II.3.e. Földrajzi övezetesség	33
II.3.f. Pólusvonal	34
II.3.g. II. irányredukció	35
II.4. Következtetések	37
III.A torzulások csökkentése numerikus módszerekkel	39
III.1. A torzultság számítása szabálytalan felületeken	39
III.1.a. Korábban alkalmazott módszerek	39
III.1.b. A Simpson-formula kiterjesztése szabálytalan felületre	40
III.2. Numerikus optimalizálás	43
III.2.a. Előzmények	43
III.2.b. A szimplex-módszer és javítása	44
III.3. Vetületeptimalizáló alkalmazás fejlesztése	46
III.4. Melyik kritériumot érdemes választani?	46
III.4.a. Módszertan	47
III.4.b. A hossztorzultság mint a szög- és területtorzultság követ- kezménye	47
III.4.c. A véges torzultság hátrányai	50
III.4.d. A másodrendű torzultság használata	52
IV. Legjobb vetületek	55
IV.1. Valódi hengervetületek	55
IV.2. Valódi sík- és kúpvetületek	60
IV.3. Képzetes hengervetületek	64
IV.4. Képzetes kúpvetületek	67
IV.4.a. Általános leírás	67
IV.4.b. Aszimmetrikus képzetes kúpvetületek	69
IV.4.c. Szimmetrikus képzetes kúpvetületek	71
IV.5. Képzetes síkvetületek	75
IV.5.a. Koncentrikus képzetes síkvetületek	75
IV.5.b. Poliazimutális vetületek	76

IV.6. Egyéb képzetes vetületek	78
V. Kis méretarányú térképek megjelenítési problémái a térinformatikában	84
V.1. Térképi szakadások	85
V.1.a. Motiváció	85
V.1.b. A GeoJSON-formátum	87
V.1.c. Alkalmazás síkvetületeken	88
V.1.d. Szakadások a nem osztott vetületeken	89
V.1.e. Osztott és oktaéder vetületek	90
V.1.f. Pontszerű elemek a szakadáson	92
V.1.g. Töröttvonalak megszakítása	92
V.1.h. Felületek összekötése	95
V.1.i. Implementálás	98
V.2. Raszteres állományok	98
V.2.a. Leképezés nyílt forrású programokkal	98
V.2.b. A raszteres adatok leképezésének elve	100
V.2.c. A munka során használt algoritmusok	101
V.2.d. Megvalósítás	103
V.3. Leképező program írása	106
V.4. Egy optimális torzulású vetület alkalmazhatósága	106
VI. Az értekezés tézisei	109
Függelékek	112
A. A térképolvasási kérdőív és a rá adott válaszok	112
B. Globális torzultságok számított értékei	117
C. Néhány optimális torzulású vetület közelítő képlete	120
Felhasznált irodalom	123
Összefoglalás	130
Summary	131
Adatlap	132

Ábrák jegyzéke

I.1. A görbültség és ferdültség szemléletes jelentése	14
I.2. Alakváltozási diagram és Tissot-indikátrix Grönlandon	16
I.3. A Hammer-vetület torzulásai	17
II.1. A területtorzulást vizsgáló feladat	27
II.2. A meridiánkonvergencia hatását vizsgáló feladat	28
II.3. Az ellenmeridián hatását vizsgáló feladat	30
II.4. A szakadások hatását vizsgáló feladat	32
II.5. A fokhálózat értelmezését vizsgáló feladat	33
II.6. A pólusvonal hatását vizsgáló feladat	35
II.7. A II. irányredukció hatását vizsgáló feladat	36
III.1. A piros szélességi körök többször metszik a felületet	42
III.2. Összefüggések a különböző torzultságok között	49
III.3. Véletlen szakaszfelezők eloszlása egy téglalapban	52
III.4. Legjobb képzetes síkvetületek az Atlanti-óceánra különböző kritéri- umok szerint	53
III.5. Legjobb képzetes síkvetület az Atlanti-óceánra a másodrendű tor- zultság szerint	54
IV.1. A legjobb valódi hengervetület képe	59
IV.2. A legjobb valódi síkvetület numerikus megoldása	62
IV.3. A legjobb valódi kúpvetület Oroszországra	62
IV.4. A legjobb valódi síkvetület közelítése a teljes földfelszínre	63
IV.5. Legjobb képzetes hengervetületek a $\pm 85^\circ$ -os szélességek közötti területekre optimalizálva	66
IV.6. Polárkoordináták értelmezése képzetes vetületekben	68
IV.7. Optimális torzulású képzetes kúpvetületek	72
IV.8. Képzetes kúpvetületek a teljes Föld ábrázolására	74

IV.9. Poliazimutális vetületek	77
IV.10. Legjobb vetületek közelítése	80
IV.11. Átalakított sztereografikus vetületek	83
V.1. Szakadások figyelmen kívül hagyva és helyesen kezelve aszimmetrikus ferdetengelyű, átszámozott Aitoff-vetületben	86
V.2. Ausztrália kitöltése Északi-Atlanti-óceán középpontú síkvetületen .	89
V.3. Szakadás a pólusvonalon átszámozott Hammer-vetületben	90
V.4. Szakadások osztott Bonne-vetületben	91
V.5. Bevágások Waterman vetületében	92
V.6. Felületek megszakítása	96
V.7. A GDAL-könyvtár levágta a domborzatmodell jelentős részét Van der Grinten I. vetületében	99
V.8. A GDAL-könyvtár hibásan képezte le az eredetileg globális domborzatmodellt ferdetengelyű négyzetes hengervetületbe	99
V.9. Domborzatmodell szögtartó Cahill-vetületbe képezve	104
V.10. Bonyolult kontúrvonalú Raisz-vetületbe helyezett raszteres adatbázis	104
V.11. A Mars legjobb pólusíves vetülete	105
V.12. Kartografált tematikus térkép optimális torzulású vetületben	108

Táblázatok jegyzéke

II.1. Helyes válaszok aránya demográfiai csoportonként	25
II.2. Az U-próba eredménye	25
III.1. Legjobb ferde transzverzális képzetes síkvetület együtthatói az Atlanti-óceánra	52
A. A térképolvasási kérdőív és a rá adott válaszok	112
B. Globális torzultságok számított értékei	117
C. Néhány optimális torzulású vetület közelítő képlete	120

Fontosabb jelölések

a	Maximális hossztorzulás
b	Minimális hossztorzulás
c	Kör középpontjának helye az y tengelyen (polárkoordinátás fölírásnál)
E	Globális teljes torzultság
$E_?$	Globális torzultság, alsó indexben a torzulási modulus vagy arány
\tilde{E}	Relatív globális teljes torzultság
$\tilde{E}_?$	Az alsó indexben jelölt torzulásra vonatkozó relatív globális torzultság
e	Euler-féle szám $e = 2,71828 \dots$
g_{ij}	A $\gamma(\beta, \lambda)$ együtthatói
h	Parallelkör menti hossztorzulás
i, j	Futó indexek
i	Képzetes egység $i = \sqrt{-1}$
k	Meridián menti hossztorzulás
l	Hossztorzulási modulus
\bar{l}	Hossztorzulási arány
n	Sugárhajlás (polárkoordinátás fölírásnál)
\bar{o}	Alaktorzulási arány
p	A területtorzulás nemkívánatossága a szögtorzuláshoz képest $0 \leq p \leq 1$
R	Földsugár $R \approx 6371$ km
r_i	A $\varrho(\beta)$ együtthatói
s	Alapfelületi távolság
s'	Képfelületi távolság
T	Alapfelületi felszín
T'	Képfelületi felszín
w	Komplex koordináta ($w = y + ix$)
x	Vízszintes síkkoordináta
y	Függőleges síkkoordináta
z	Kör és az y tengely metszéspontja ($z = c - \varrho$)

α	Alapfelületi azimut
α'	Képfelületi azimut
β	(Segéd)pólustávolság, $\beta = \pi/2 - \varphi$
γ	Polárszög (polárkoordinátás fölírásnál)
Δ	Megváltozás
δ	Hibahatár
ε	Lokális teljes torzultság
$\varepsilon_?$	Lokális torzultság, alsó indexben a torzulási modulus vagy arány
ζ_i	A $z(\varphi)$ függvény együtthatói
Θ	Fokhálózat képei által bezárt szög
ϑ	1. vetületi főiránnyal bezárt szög (alapfelületen)
ϑ'	1. vetületi főiránnyal bezárt szög (képfelületen)
ι	Szögtorzulási modulus
κ	Görbültség (1/ földszög)
λ	Középmeridiántól vett hosszúságkülönbség vagy segédhosszúság
λ_0	Segédpólus földrajzi hosszúsága
λ_k	(Segéd)középmeridián (segéd)hosszúsága
ξ_{ij}	Az $x(\varphi, \lambda)$ függvény együtthatói
π	Ludolph-féle szám $\pi = 3,14159 \dots$
ρ	Sugárfüggvény
σ	Ferdültség (1/ földszög)
ς_i	A $c(\varphi)$ függvény együtthatói
τ	Területtorzulási modulus
$\bar{\tau}$	Területtorzulási arány
v_{ij}	Az $y(\varphi, \lambda)$ függvény együtthatói
φ	(Segéd)szélesség
φ_0	Segédpólus földrajzi szélessége
ψ_i	Komplex polinom együtthatói
ω	Legnagyobb szögmegváltozás

A képletekben előforduló szögeket általában *radiánban* kell behelyettesíteni. A fokban megadott szögeket a jobb felső indexben elhelyezett kör jelzi (pl. α°).

A távolságokat, ha a szöveg másképp nem jelzi, egységsugarú gömbre vonatkoztatott egységnyi méretarányú térképen kell értelmezni. A tényleges térképi méreteket tehát úgy kapjuk meg, hogy a képletekben kapott értéket beszorozzuk a gömbnek tekintett Föld sugarával (6371 km), és elosztjuk a térkép méretaránysszámaival.

A megadott vetületi egyenletek mindig a normális elhelyezésre vonatkoznak, más elhelyezésnél a földrajzi koordináták helyére segédkoordináták helyettesítendőek. A segédkoordinátákat számítógéppel a következő képletek segítségével érdemes számítani (SNYDER, 1987):

$$\varphi^* = \arcsin [\sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos(\lambda - \lambda_0)] \quad (1)$$

$$\lambda^* = \arctg \frac{\cos \varphi \sin(\lambda - \lambda_0)}{-\cos \varphi_0 \sin \varphi + \sin \varphi_0 \cos \varphi \cos(\lambda - \lambda_0)} - \lambda_k \quad (2)$$

ahol arctg alatt a számítógép síknegyed-korrekcióval rendelkező ATAN2 függvényét kell érteni.

Köszönetnyilvánítás

Jelen értekezés semmiképp sem készülhetett volna el ebben a formában az ELTE Térképtudományi és Geoinformatikai Tanszék munkatársai nélkül. A terjedelmi korlátok miatt mindenkit nem lehet megemlíteni, de köszönet illeti Klinghammer Istvánt, hogy vállalta a dolgozat témavezetését, és az elinduláshoz ötleteket adott. Elsősorban kell köszönetet mondanom Györffy Jánosnak a vetülettani alapismeretekért, a rendszeres konzultációkért, a szövegek lelkiismeretes átolvasásáért és a szakmai iránymutatásért. Hasonlóan kell megköszönnöm Gede Mátyásnak, hogy a térinformatikai alapismereteket megadta, és hogy a gyakori konzultációk során felmerült ötleteivel jelentősen gazdagította a dolgozat ötödik fejezetét. Nem feledkezhetem meg Albert Gáspárról, akinek a tudományos igényességre vonatkozó javító célú megjegyzései nélkül szegényebb lenne a szöveg. Köszönöm Márton Mátyásnak a tematikus térképre vonatkozó ötletét, és Ungvári Zsuzsának az adminisztratív ügyekkel kapcsolatos gyakorlati tanácsokat. Végül, de nem utolsósorban emelem ki Gercsák Gábor áldozatos és precíz munkáját az angol nyelvű kézirateim nyelvi lektorálása során.

Doktorandusz társaim közül Szigeti Csabát kell kiemelnem, aki az itt ismertetett kérdőíves kutatás kivitelezésében jelentős szerepet vállalt. Nélküle ez a hiánypótló munka nem születhetett volna meg. Barancsik Ádám a doktori iskola első évében ismertetett meg velem néhány korszerű programozási fogást, amely igen hasznosnak bizonyult a későbbiekben. Jeney János pedig az első nemzetközi publikáció eléréséhez nyújtott nélkülözhetetlen segítséget.

Előszó

A térképészet története során a kezdetektől fogva problémát okozott, hogy a görbült földfelszínt nem lehetséges torzulásmentesen ábrázolni a sík papírlapon. Ezt még a mai digitális kartográfia eszközei mellett is figyelembe kell vennünk, hiszen bár számítógéppel lehetőségünk van háromdimenziós modellek készítésére, ezek megjelenítése is sík képernyőn történik. A görbült felületek és a sík közti leképezések, azaz vetületek iránti igényt tovább erősíti, hogy egyetlen virtuális térbeli modellen sem lehet a két féltékét egyszerre áttekinteni, míg egy sík térképen ez könnyen megvalósítható.

Az első vetületek (pl. Ptolemaiosz vetületei) még geometriai úton szerkesztett fokhálózattal próbálták szemléltetni a Föld gömb alakját. A leképezésekkel már ekkor is a *hasonlósági elvet* törekedtek kielégíteni, melynek lényege, hogy a sík térképen szereplő objektumok a lehető leghűségesebben adják vissza gömbi megfelelőiket (KLINGHAMMER, 2015). A gömb és a térkép közti leképezések matematikai megfogalmazásának megfelelően a vetületeket kétváltozós függvények, ún. vetületi egyenletek segítségével is megadhatjuk. A vetületi torzulások e függvényeken keresztül egzakt módon számíthatókká válnak. Ezen torzulások csökkentésével lehet elérni, hogy a térkép a lehető legkisebb mértékben térjen el a földrajzi valóságtól.

Az ilyen irányú vetülettani kutatásokat AIRY (1861) műve alapozta meg, melyben a matematikai analízis módszereivel egy kedvező torzulású síkvetület egyenleteit határozta meg. Ugyanebben a korban alkotott TISSOT (1878), aki valamennyi térképi torzulást visszavezetett végtelenül kicsi körök képeinek vizsgálatára. Tissot elmélete a mai napig meghatározó jelentőségű a vetülettanban. A lehetséges legkisebb torzulású vetületek elmélete MESCSERJAKOV (1968) művében teljessé válik. Könyvében világosan és egyértelműen definiálta, hogy mit tekintünk *legjobb vetületnek*.

A számítástechnika segítségével mára lehetőség nyílt numerikus módszerek kiterjedt alkalmazására, melyben főként FRANČULA (1971) és SNYDER (1985) végzett úttörő kutatásokat. Ebben az időben némi szemléletváltás is bekövetkezett:

míg korábban a vetület torzulásait mindig egy pont kis környezetében mérték, újabb kutatásokban egyre divatosabbá válik véges méretű földfelszíni alakzatok véletlen generálása és az ezeken jelentkező torzulások numerikus vizsgálata. Ennek elméletét legteljesebben CANTERS (2002) monográfiájában találjuk. A véges méretű alakzatok vizsgálata PETERS (1975) szerint azért kívánatos, mert míg Tissot torzulási elmélete végtelenül kicsi skálán vizsgálta a változásokat, a térkép olvasója véges méretű alakzatokról kíván információt gyűjteni.

A kutatás során jelentős eltérést észleltem a közelmúlt szovjet és nyugati irodalma között. A német és angol nyelvű kutatások inkább gyakorlati szemléletet követnek, kevés elméleti alappal. Igyekeznek elkerülni a matematikai analízis komolyabb alkalmazásait; az oroszul író tudósok eredményeit mintha még a kortárs kutatók sem ismernék. Így fordulhatott elő, hogy LASKOWSKI (1997) angol nyelvű monográfiájában már több száz lehetséges képletet találunk a torzulások értelmezésére mindenféle elméleti megalapozás nélkül, sőt dimenziótlan torzultságoknak még mértékegységet is javasolt.

Az orosz nyelvű tudományos művek inkább elméleti szemléletet követnek. MESCSERJAKOV (1968) például több parciális differenciálegyenlet-rendszert fölír, melyek leírják, hogy az egyes vetületi torzulások hogyan függnek egymástól; nem világos ugyanakkor, hogy miképpen lehet ezeket a képleteket kedvezőbb torzulású vetületek fejlesztésére fölhasználni.

Értekezésemben szeretném kihasználni azt az előnyös helyzetet, hogy a magyar térképészeti oktatás mindkét kultúrkör tudományos eredményeit ismeri. Éppen ezért az első fejezetben elméleti alapon megvizsgálom az elterjedt mérőszámokat, és FRANČULA (1971) kísérleti úton kapott eredményét elméleti okfejtéssel alátámasztva bemutatom, hogy kizárólag a logaritmikus jellegű torzultságoknak van létjogosultsága kis méretarányú térképeken. A mérőszámokon dimenzióanalízist végzek, és a dimenzióval rendelkező, de a szakirodalomban mértékegység nélkül feltüntetett mennyiségeknek mértékegységet javaslok.

Az értekezés második fejezetében az olvasó gyakorlati szempontokkal találkozik. A fejezet célja, hogy föltárja a vetülettani kutatások szükségességét, és bemutassa, hogy az első fejezetben definiált torzulások hogyan hatnak a térkép információközvetítő szerepére. Ez a részben különböző csoportok térképolvasási szokásait

vizsgálja. Kiemelendő eredmény a pólusvonal hatásának kimutatása, és hogy egy esetlegesen bonyolultabb fokhálózat nem zavarja a térkép helyes értelmezését.

A harmadik fejezet már a kedvező torzulású vetületekhez vezető út bemutatásával foglalkozik. Egyrészt a fölháznált numerikus módszerek tételes ismertetése található ebben a részben, másrészt összefüggések statisztikai kiértékelésével törekszem bemutatni, hogy melyik torzulási jellemző pontosan mit mér a vetületen. Számításokkal alátámasztom, hogy a véges alakzatok torzultsága a másképp vélekedő terjedelmes szakirodalom ellenére jól magyarázható Tissot torzulási elméletéből. Az itt ismertetett numerikus módszerek gyakorlati alkalmazását a negyedik fejezet adja, ahol vetületcsaládonként rendszeresen végighaladva a legjobb vetületek közelítő képleteit vezetem le. A vetületi egyenletek mellett térképes ábrák mutatják be az így megalkotott vetületek torzulási viszonyait.

Az ábrák elkészítését eredetileg térinformatikai eljárásokkal kívántam elvégezni, ez azonban a mai GIS-nek a vetületek terén mutatott gyengesége miatt nem adott kielégítő eredményt. A problémák megoldására fejlesztett algoritmusok ismertetése olvasható az ötödik fejezetben. Az értekezés végén egy tematikus térkép mutatja be, hogy a kutatás nem volt hiábavaló. A mű elején ismertetett kérdőív eredményeinek tükrében látható, hogy a különböző szempontok szerint az ilyen optimális torzulású vetületben rajzolt térképek mind a nagyközönség, mind a kutatói munka számára hasznos eszközöket jelenthetnek.

Első fejezet

Vetülettani fogalmak

I.1. A térképvetület fogalma

Térképvetületnek nevezzük azt a leképezést, amely a térképezett görbült felület és a sík térkép koordináta-rendszerei között összefüggést teremt. A leképezés értelmezési tartományát *alapfelületnek*, az értékkészletét *képfelületnek* nevezzük. A vetületek tehát speciális $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ függvények.

A térképek vetületeivel szemben alapvető elvárások fogalmazhatók meg. Ezek részben praktikus, részben esztétikai megfontolások:

- a vetület alapfelülete legyen forgásszimmetrikus, kétszer differenciálható, zárt alakban leírható felület;
- a vetület képfelülete legyen torzulásmentesen síkba fejthető;
- a leképezés legyen kölcsönösen egyértelmű, kétszer folytonosan differenciálható függvény;
- a térkép legyen szimmetrikus legalább a függőleges síkkoordináta-tengelyre, de ha lehetséges, a vízszintes síkkoordináta-tengelyre is.

A felsorolásból a gyakorlatban bármelyik feltétel elengedhető. Például a Föld geoid alakja jól közelíthető forgástesttel (forgási ellipszoiddal), de bizonyos égitesteknél szükséges háromtengelyű ellipszoidot vagy akár még bonyolultabb testet választani alapfelületnek.*

A vetület képfelülete sem mindig fejthető síkba, bár a görbült felületre képző vetületeket (pl. gömbvetületet) csak matematikai segítségnek használjuk, hogy a végső síkba képezés alapfelülete egyszerűbben leírható legyen.

A leképezéssel szembeni elvárások soha sem teljesülhetnek, hiszen a zárt, véges forgásfelületek nem képződhetnek le folytonosan a nyílt, végtelen síkra. Az ábrázolás folytonossága az alapfelület legalább egy pontján meg kell szakadjon.

* A háromtengelyű ellipszoid vetületeit a közelmúltban nagy részletességgel dolgozták ki orosz kartográfusok (NIRCOV, 2017).

Szakadásról beszélünk a térkép azon pontjain vagy vonalain, ahol a folytonosság nem teljesül. Nem teljesülhet a kölcsönös egyértelműség sem a szakadásokban, de egyes vetületek^{*} nagy kiterjedésű területeket ábrázolnak ismétlődően.

Különböző összetett vetületek meghatározott vonalain nem teljesül a differenciálhatóság, ezt *törésnek* nevezzük. Ha a leképezés valamely deriváltja a végtelenbe divergál, a vetület abban a pontban *szinguláris*. Előfordulhat, hogy a szinguláris pontok, vonalak nem is ábrázolhatók, mert azt a vetület végtelen távoli pontba képi bele.

A függőleges szimmetria miatt az y tengelyre egy gömbi főkör felének kell képződnie. Ez a félkör a *középmeridián*, a főkör másik fele az *ellenmeridián*. Kétértelműség esetén – a függőleges tengelyre egy teljes gömbi főkör képe került – középmeridiánnak az y tengely negatív felének ősképet tekintem.

A vetülettan két jellegzetesen eltérő tudományágra oszlik: a *topokartográfia*ra és a *geokartográfia*ra. Előbbi a topográfiai és kataszteri térképek vetületeivel foglalkozik, melyek ma már minden esetben forgási ellipszoid alapfelületűek és mentesek a szögtorzulástól. Utóbbi a nagyobb területeket ábrázoló térképek vetületeit vizsgálja.

A térkép méretaránya jelentősen befolyásolja a vetületek viselkedését. 1 : 10 000 000-nál nagyobb méretarányokban csak viszonylag kis terület ábrázolható. FRANČULA (1971) megállapította, hogy ha az ábrázolt terület egyik kiterjedése sem nagyobb 3500 km-nél, a gyakorlatban használt vetületek torzulásai nem láthatók szabad szemmel. Az előnyös torzulású vetületek kisebb méretarányoknál hoznak látványos eredményt. Ilyen kis méretarányoknál azonban tekinthetjük a Földet egyszerűen gömb alakúnak, mert ezzel legfeljebb 20 km hibát követünk el. Ez első ránézésre nagynak is tűnhet, ám már 1 : 10 000 000 méretarányban is csak 0,2 mm lesz a hiba, mely nagyságrendben közel áll a nyomdai pontosság és a képernyők pixelméretéből adódó megjelenítési pontosság mértékéhez. A gömb alapfelület alkalmazása cserében nagymértékű egyszerűsítést jelent a továbbiakban.

^{*} Ilyen például Baranyi IV. vetületének osztott változata.

I.2. A vetület torzulásai

Ebben a fejezetben áttekintjük és egységes rendszerbe foglaljuk a vetületi torzulások minősítésére általában alkalmazott mennyiségeket, illetve ahol szükséges, újakat vezetünk be. A felhasznált képletek itt jellemzően levezetés nélkül szerepelnek, mert ezeket a gyakran használt összefüggéseket a legtöbb vetülettani szakirodalom részletesen tárgyalja. A bizonyítások megtalálhatók például GYÖRFFY (2012) tankönyvében.

I.2.a. A torzulási arány

Hossztorzulási aránynak nevezzük a megfelelő képfelületi és alapfelületi hosszak arányát:

$$\bar{l} = \frac{s'}{s} \quad (\text{I.1})$$

Az egyszerűség kedvéért a hossztorzulási arányt kizárólag az alapfelületi egyenesekre számolunk. További egyszerűsítésként nem szokás figyelembe venni a geodéziai vonalak képeinek görbületét, hiszen a térképolvasó a szakirodalom szerint (CANTERS, 2002; GOTT – MUGNOLO – COLLEY, 2007) többnyire úgy sincs tisztában ezzel.* Így a gyakorlatban alkalmazott képlet:

$$\bar{l} \approx \frac{\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y}}{\arccos[\sin \varphi \sin(\varphi + \Delta\varphi) + \cos \varphi \cos(\varphi + \Delta\varphi) \cos \Delta\lambda]} \quad (\text{I.2})$$

Fontos megjegyezni, hogy a mérőszám érzékeny a vetületi szakadásokra. Ha két pont, mely a gömbön közel volt, a térkép két átellenes pontjára képződik le, igen nagy hibát fog jelezni a mérőszám. E miatt például jobbnak bizonyulnak a Kelet–Nyugat irányban közel körkontúrba préselt fokhálózattal rendelkező képzetes hengervetületek a kellemesebb ellipszis alakúaknál. Nem célravezető ugyanakkor az ilyen szakaszokat egyszerűen kihagyni a számításból, hiszen számos vetület pont a térkép széleinél mutatja a legnagyobb torzulásokat. Érdekes tehát a szakasznak és a szakadó fokhálózati vonalnak a metszéspontját megkeresni – ennek kiszámításáról az V.1.g. fejezetben írtam –, majd a térképi hosszt a szakadás két oldalán összegezni (ALBINUS, 1981). Azokról a gyakorlottabb térképhasználókról, akik számára sok szakadást tartalmazó térképet készítünk, bátran feltételezhető, hogy a távolságokat ehhez hasonló módon értelmezik (II.3.d. fejezet).

* A II.3.g. fejezetben kapott eredményeink ennek ellentmondanak.

A területtorzulási arány ehhez hasonlóan a képfelületi és alapfelületi felszínek aránya:

$$\bar{\tau} = \frac{T'}{T} \quad (\text{I.3})$$

A területtorzulási arányt a gyakorlatban gömbháromszögeken érdemes vizsgálni, és a képfelületi idomokat megfelelő síkháromszögekkel közelíteni (CANTERS, 2002). Itt is figyelemmel kell lennünk a vetületi szakadásokra.

A hossztorzulásnál és területtorzulásnál alkalmazott szemlélet nem működik az alaktorzulás mérésénél. Canters úgy próbálta megoldani a problémát, hogy vett egy véletlenszerű kört az alapfelületen, majd vizsgálta, hogy a megfelelő képfelületi idom mennyire tér el a körtől. Ennek hibája, hogy a sztereografikus vetület körtartó tulajdonsága miatt alaktartónak bizonyul. Ezért létre kellett hoznom egy saját mérőszámot:

Egy jó alaktorzulási arány a következő feltételeknek felel meg:

- hasonlósági transzformációra invariáns;
- értéke akkor és csak akkor 1, ha az alapfelületi idom alakja megegyezik a képfelületiével, és annál nagyobb pozitív szám, minél nagyobb eltérést tapasztalunk;
- az eltérés mértéke nem korlátos felülről;
- a többi mérőszámmal összevethető skálán – jelen esetben arányskálán – értékel.

Két síkháromszög alakja akkor egyezik meg, ha a megfelelő szögei megegyeznek. Ugyanezt az oldalhosszakkal is megfogalmazhatjuk: az alak akkor egyezik meg, ha a megfelelő oldalak aránya megegyezik. Mivel a gömbháromszögek és síkháromszögek belső szögeinek összege nem egyezik meg, ezért célszerű az utóbbi megfogalmazást használni. Tehát az alaktorzultság akkor lesz 0, ha a gömbháromszög és a síkháromszög megfelelő oldalainak aránya megegyezik. Az ettől való eltérést jól szemlélteti az oldalak arányának mértani szórása. Ez a szokásos szóráshoz hasonló mennyiség, melyet a mértani középtől vett átlagos eltérésnek foghatunk fel. A μ mértani középpel rendelkező X_i lognormális, azaz arányskálájú adatsor szórása $e^{\sqrt{\sum (\ln X_i - \ln \mu)^2 / n}}$. Az így definiált szórás a szokásos szórással ellentétben dimenzió nélküli és független a skálázástól, esetünkben a térkép névleges méretarányától (KIRKWOOD, 1979).

Így tehát az *alaktorzulási arány* képlete:

$$\bar{\sigma} = e^{\sqrt{\frac{\left(\ln \frac{A'}{A} - \ln \mu\right)^2 + \left(\ln \frac{B'}{B} - \ln \mu\right)^2 + \left(\ln \frac{C'}{C} - \ln \mu\right)^2}{3}}} \quad (\text{I.4.a})$$

ahol A, B és C a gömbháromszög oldalai, A', B' és C' a leképezett síkháromszög megfelelő oldalai és

$$\mu = \sqrt[3]{\frac{A'}{A} \cdot \frac{B'}{B} \cdot \frac{C'}{C}} \quad (\text{I.4.b})$$

A fenti képlet a hatványozás azonosságaiával jóval egyszerűbb alakra hozható:

$$\ln^2 \bar{\sigma} = \frac{1}{3} \left(\ln^2 \frac{A'}{A\mu} + \ln^2 \frac{B'}{B\mu} + \ln^2 \frac{C'}{C\mu} \right) \quad (\text{I.5})$$

Az így előállított mérőszám minden korábban említett feltételnek megfelel. Képletszerűen összefügg Gott és Mugnolo méretaránytól függetlenített hossztorzultságával (I.25), de a méretarányt nem globálisan, hanem lokálisan, az adott gömbháromszögre normalizálja.*

Az egyetlen nehézség akkor adódik, ha a gömbháromszög valamely oldala metsz egy vetületi szakadást. Ilyen esetben a térképen a háromszög megszakad. A távolságok torzulásánál mérthez hasonlóan a szakadó oldalhosszakat is két szakaszban mértem. Habár így az A', B' és C' oldalakra nem biztos, hogy fennáll a háromszög-egyenlőtlenség, de a képletbe való mechanikus behelyettesítés megvalósítható.

I.2.b. A torzulási modulus

A torzulási modulusok abban térnek el a torzulási arányoktól, hogy végtelenül kicsi elemek képét vizsgálják, így csak egy pontra jellemző értéket adnak.

A *hossztorzulási modulus* a hossztorzulási arány határértéke, midőn az alapfelületi távolság nullához tart:

$$l = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta s'}{\Delta s} = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2} \quad (\text{I.6})$$

*Egy kontinens térképi alakja valóban nem függ attól, hogy a Föld más pontján milyen torzulások lépnek föl.

Ez az α azimut függvényében:

$$l^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 \right] \cos^2 \alpha + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \right] \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \varphi} + 2 \left[\frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right] \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos \varphi} \quad (\text{I.7})$$

Speciálisan a fókálózat irányában, ahol α rendre 0° , illetve 90° :

$$k = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2} \quad (\text{I.8.a}) \quad h = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2}}{\cos^2 \varphi} \quad (\text{I.8.b})$$

Tissot tételei megmutatják, hogy az elemi kis alapfelületi kör differenciálható vetületekben elemi kis ellipszisre képződik le. Az ellipszis féltengelyei egyúttal a hossztorzulási modulus szélsőértékei. Az a, b maximális és minimális hossztorzulások meghatározásához szükséges a fókálózat képei által bezárt Θ szög ismerete:

$$\text{ctg } \Theta = \frac{\frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda}}{\frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda}} \quad (\text{I.9})$$

Ekkor

$$a = \frac{\sqrt{h^2 + k^2 + 2hk \sin \Theta} + \sqrt{h^2 + k^2 - 2hk \sin \Theta}}{2} \quad (\text{I.10.a})$$

$$b = \frac{\sqrt{h^2 + k^2 + 2hk \sin \Theta} - \sqrt{h^2 + k^2 - 2hk \sin \Theta}}{2} \quad (\text{I.10.b})$$

Azt az irányt, amerre az a maximális hossztorzulás lép föl, *I. vetületi főiránynak* nevezzük. A hossztorzulási modulus az I. vetületi főiránnyal bezárt ϑ szög függvényében leegyszerűsödik:

$$l = \sqrt{a^2 \cos^2 \vartheta + b^2 \sin^2 \vartheta} \quad (\text{I.11})$$

A fenti képletet érdemes használni az (I.7) egyenlet helyett akkor, ha nem fontos az azimuttal számolni.

Észrevettem, hogy a hossztorzulási modulus egy arányszám, mértékegysége, dimenziója nincs, exponenciális skálájú. Ez könnyen belátható, hiszen egy adott pontban és irányban l_1 és egy l_2 hossztorzulású vetületek egymás utáni alkalmazása $l = l_1 l_2$ torzuláshoz vezet. Ebből következik, hogy nem l , hanem $\ln l$ adódik össze a függvények egymás utáni alkalmazásakor.

Hasonló módon vezetjük be a *területtorzulási modulus* fogalmát:

$$\tau = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta T'}{\Delta T} = \frac{\frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda}}{\cos \varphi} = hk \sin \Theta = ab \quad (\text{I.12})$$

melyre az előző gondolatmenet ugyanúgy érvényes, tehát szintén exponenciális skálájú arányszám.

A *szögtorzulási modulus* a képfelületi η' és az alapfelületi η szögek tangenseinek aránya:

$$\iota = \frac{\operatorname{tg} \eta'}{\operatorname{tg} \eta} \quad (\text{I.13})$$

A mérőszám függ a helyen kívül a két szögszár irányától is, de ha az egyik szögszár az I. vetületi főirány, akkor a másik szögszár helyétől függetlenül:

$$\iota = \frac{\operatorname{tg} \vartheta'}{\operatorname{tg} \vartheta} = \frac{b}{a} \quad (\text{I.14})$$

A torzulások ábrázolására két széles körben alkalmazott módszer terjedt el:^{*} A *torzulási izovonal* az izovonalas ábrázolás módszerét alkalmazza. A szemléletesség kedvéért lehet a torzulási modulusokból származtatott mennyiségeket is feltüntetni. A területtorzulás esetén τ 1-től vett eltérése %-ban kifejezve, a szögtorzulás esetén pedig az ún. *legnagyobb szögmegváltozás* könnyen fölfogható mennyiség:

$$\omega = 2 \arcsin \frac{a-b}{a+b} \quad (\text{I.15})$$

Kis torzulású vetületekben a torzulási izovonalak szögtartó vetületek esetén bizonyítottan (CSEBISÉV, 1856; JUHÁSZ, 2008), más vetületek esetén vélhetően (CANTERS, 2002) közel párhuzamosan futnak az ábrázolt területtel.

A hossztorzulás általában függ az iránytól, e miatt kartodiagram-módszerrel ábrázolhatjuk. Ez az ún. *Tissot-indikátrix* (TISSOT, 1878). A diagram egy ellipszis, melynek sugara arányos az adott képfelületi irányban lévő hossztorzulással. Az ellipszis területe a terület- lapultsága a szögtorzulást szemlélteti. Az ellipszisére rajzolt körrel jelzem a torzulásmentes állapotot, mert a Tissot-indikátrixról önmagában nem lehetne leolvasni a modulusok abszolút értékét. Tissot-indikátrixok pirossal ábrázolva a 17. oldalon, az I.3. ábrán láthatók.

^{*} Az itt leírtakon kívül még más módszereket is találtak ki (MULCAHY – CLARKE, 2001), melyek azonban nem lettek népszerűek.

I.2.c. A torzultság

A torzulásmentességet mindhárom torzulási modulusnál az 1 érték jelenti. Az ettől vett eltérés mértékét fejezi ki a *torzultság*. A *területtorzultság* tehát az exponenciális skála figyelembe vételével $\ln \tau - \ln 1$ lenne, de a negatív számok kiküszöbölése érdekében ezt négyzetre emeljük:

$$\varepsilon_{\tau}^2 = \ln^2 ab \quad (\text{I.16})$$

A *szögtorzultság* számításakor csak azokat a szögeket vesszük figyelembe, amelyek valamelyik szögszára vetületi főirány. Ekkor

$$\varepsilon_l^2 = \ln^2 \frac{b}{a} = \ln^2 \frac{a}{b} \quad (\text{I.17})$$

Fenti mérőszámokat KAVRAJSZKIJ (1934) nyomán *Kavrajcszkij-típusú torzultságok*nak nevezzük. Nem ez az egyetlen lehetőség a torzultság kifejezésére. Lehetne például $\ln^2 \tau$ helyett $(\tau - 1)^2$ -et (AIRY, 1861) vagy $|\tau - 1|/(\tau + 1)$ -et (PETERS, 1975; CANTERS, 2002) is írni, és a torzulásmentes állapot torzultsága továbbra is zérus. LASKOWSKI (1997) művében több tucat hasonló, fantáziadús megoldást találhatunk. Felfigyeltem ugyanakkor arra, hogy ezek a mérőszámok nem veszik figyelembe, hogy a torzulási modulusok exponenciális természetűek, ezeket egymással összeadni nem, csak összeszorozni van értelme. Több változatnál a τ -hoz és $1/\tau$ -hoz tartozó torzultságok sem egyeznek meg egymással.

BAJEVA (1987) megállapította, hogy a Kavrajcszkij-típusú torzultságoknak speciális tulajdonságai vannak: meridiánban hossztartó valódi vetületek bármely pontján $\varepsilon_{\tau}^2 = \varepsilon_l^2$, továbbá azonos mértékű terület- és szögtorzulás esetén azonos mértékű a torzultság is. Mivel a kétfajta torzultság így bizonyítottan azonos skálájú, ezért ezek együttes hatása vizsgálható azok súlyozott átlagaként. Ez a *teljes torzultság*:

$$\varepsilon^2 = p \ln^2 ab + (1 - p) \ln^2 \frac{a}{b} \quad (\text{I.18})$$

ahol $0 \leq p \leq 1$ jelöli a területtorzulás és $(1 - p)$ a szögtorzulás nemkívánatosságát. Speciálisan $p = 1/2$ esetben a mérőszámot *Airy – Kavrajcszkij-kritérium*nak nevezzük:

$$\varepsilon^2 = \frac{\ln^2 ab + \ln^2 \frac{a}{b}}{2} = \ln^2 a + \ln^2 b \quad (\text{I.19})$$

A hossztorzulás függ a helyen kívül az iránytól is, ezért ezt a pontra átlagolnunk kell. Ez a *hossztorzultság* vagy *Jordan – Kavrajszkij-kritérium*:

$$\varepsilon_l^2 = \frac{1}{2\pi} \oint \ln^2 \sqrt{a^2 \cos^2 \vartheta + b^2 \sin^2 \vartheta} d\vartheta \quad (\text{I.20})$$

mely integrandus primitív függvénye nem ismert, numerikus integrállal, például a (III.1)-gyel közelíthető. A teljes torzultsághoz képest nem ad kifejezetten sok hozzáadott információt (III.4.b. fejezet), ezért azzal összegezni kevés értelme van.

A *globális torzultság* a térkép egészének eltérése a torzulásmentes állapottól. Definiálására több lehetőség van. Elsősorban a geodézia területén használják előszeretettel a globális torzultságra a *minimax-elvet*, mely szerint a térkép torzultsága a legkedvezőtlenebb pont torzultságának felel meg (MESCSERJAKOV, 1968; JUHÁSZ, 2008). Ennek hátránya geokartográfiai alkalmazások esetén, hogy a szingularitással rendelkező, de amúgy kedvező vetületeket végtelenül rossznak értékeli. ČAPEK (2001) módosította ezt az elvet: először megadja, hogy a vizsgált területen mekkora torzultságot tolerál; majd megvizsgálja, hogy ez a terület hány százalékán teljesül. Ennek egyértelmű hátránya geokartográfiai szempontból, hogy a még tolerálható torzultság mértéke szubjektív, és erősen függ az ábrázolt területtől és tematikától. Ezért a MESCSERJAKOV (1968) által megadott, *variációs elv*nek nevezett definíciót használom, mely szerint a globális torzultság a lokális torzultságok négyzetes átlaga:

$$E = \sqrt{\frac{1}{T} \iint_T \varepsilon^2 dT} \quad (\text{I.21})$$

ahol ε^2 bármely fenti torzultság lehet. Ennek megfelelően definiálható globális hossz- (E_l), terület- (E_τ), szög- (E_i) és teljes torzultság (E). Mivel ε^2 minden esetben a torzulási modulus exponenciális skálán 1-től vett eltérése, ezért E^2 felfogható a exponenciális skálájú torzulási modulus második geometriai momentumának.

A globális hossz- és területtorzultság – utóbbin keresztül a teljes torzultság is – a térkép névleges méretarányának megváltoztatásakor megváltozik anélkül,

* Az értekezésben többször is alkalmazom a statisztika fogalomkészletét. Ezt azért tehetem meg, mert bár egy adott vetület torzulásai determinisztikusak, de lehetetlen ezt a folytonos alapfelület végtelen sok pontján mindenütt kiszámolni. Az idézett szakirodalomból többen ténylegesen is alkalmazzák azt a módszert, hogy a vizsgált területen véletlenszerűen választott pontokon számítják a torzultságot, mely így már egy valószínűségi változó statisztikai mintavétele. Kellően nagy mintánál a statisztikai mennyiségek sztochasztikusan konvergálnak a fent megadott integrálokhoz, melyek numerikus közelítése kisebb számításigényű a véletlenszerű megközelítésnél.

hogy a térképen változás történne. Ezért vezetjük be CANTERS (2002) javaslatai alapján a *relatív globális torzultságot*, mely során azt a névleges méretarányt vesszük figyelembe, amely mellett a vizsgált torzultság a legkisebb.

GOTT, MUGNOLO és COLLEY (2007) kevés magyarázat mellett megemlíti, hogy az így definiált relatív globális torzultság a lokális torzultságok szórásával egyezik meg. A következőkben levezetem a területtorzultságra, de hasonló módon más Kavrajszkij-típusú torzultságra is végiggondolható. A névleges méretarány $1/Q$ -szorosra változtatásakor $\tilde{\tau} = \tau/Q^2$ lesz. A logaritmus azonosságai miatt $\tilde{\varepsilon}_\tau = \varepsilon_\tau - \ln Q^2$, azaz a statisztikai sokaság skáláját eltoltuk. Ennek második momentuma akkor lesz a lehető legkisebb, ha $\tilde{\varepsilon}_\tau$ várhatóértéke zérus. Ez akkor teljesül, ha $\ln Q^2$ megegyezik ε_τ várhatóértékével, melyet μ_τ -val jelölök. Így viszont a relatív globális területtorzultság $\tilde{\varepsilon}_\tau = \varepsilon_\tau - \mu_\tau$, melynek négyzetes átlaga definíció szerint a szórás képletével esik egybe:

$$\tilde{E}_\tau = \sqrt{\frac{1}{T} \iint_T (\ln ab - \mu_\tau)^2 dT} = \sqrt{E_\tau^2 - \left(\frac{1}{T} \iint_T \ln ab dT \right)^2} \quad (\text{I.22})$$

A korrigált globális teljes torzultság (\tilde{E}) a relatív globális területtorzultság és a globális szögtorzultság súlyozott átlaga. Analóg gondolatmenettel a relatív globális hossztorzultság:

$$\tilde{E}_l = \sqrt{E_l^2 - \left(\frac{1}{T} \iint_T \frac{1}{2\pi} \oint \ln \sqrt{a^2 \cos^2 \vartheta + b^2 \sin^2 \vartheta} d\vartheta dT \right)^2} \quad (\text{I.23})$$

A torzultság fenti, statisztikai értelmezését a Kavrajszkij-típusú mérőszámok használata tette lehetővé, másféle kritériumokkal a fenti azonosságok jó része sérül. E miatt más mérőszámok használatát csak akkor javaslom, ha a torzulások kicsik és az alternatív torzultsági mérőszám alkalmazása jelentős egyszerűsítésekhez vezet.

1.2.d. A véges torzultság

Bizonyos szerzők szeretik a globális hossztorzultságot a hossztorzulási arány segítségével felírni. Ehhez m db véletlenszerűen kiválasztott szakaszra \bar{l} (I.2)-ben megadott alakját kell kiszámolni, majd átlagolni:

$$E_{\bar{l}} = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \ln^2 \bar{l}_i} \quad (\text{I.24})$$

mely a *globális véges hossztorzultság*.

Értelemszerűen lehet \bar{l} második momentuma helyett a névleges méretarány hatását kiküszöbölendő itt is a szórást vizsgálni, mely a *relatív globális véges hossztorzultság*, melyet ebben a formában GOTT, MUGNOLO és COLLEY (2007) használt először:

$$\tilde{E}_{\bar{l}} = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \ln^2 \bar{l}_i - \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \ln \bar{l}_i \right)^2} \quad (\text{I.25})$$

Szakaszok helyett véletlenszerű gömbháromszögeket vizsgálva és a fenti képletekben \bar{l} helyett $\bar{\tau}$ ill. \bar{o} beírásával megkaphatjuk a globális véges terület-, ill. alaktorzultságot. Az alaktorzultsági arány önmagában is független a névleges méretaránytól, így annak relatív változata nem értelmezhető.

Fontos megjegyezni a véges torzultsággal kapcsolatban, hogy megfigyelésem szerint csak igen nagy mennyiségű idom (~100 000) kiválasztásánál ad megfelelően megbízható értéket.

A teljes gömb helyett egy adott területre úgy lehet számítani a véges torzultságot, hogy a véletlenszerű szakaszok végpontjairól vagy a háromszögek csúcsairól kikötjük, hogy a vizsgált területen belül helyezkedjenek el. Kisebb területre kevesebb idom vizsgálata is elegendő.

I.3. Nem affin torzulások a vetületben

I.3.a. Görbültség és ferdültség

Tissot tételei szerint minden kétszer differenciálható vetület lokálisan egy affin transzformációra vezethető vissza. A vetületek ugyanakkor nem csak affin, hanem projektív torzulásokkal is rendelkeznek, melyeket még infinitezimálisan kis méretekben is ki lehet mutatni. Például az I.2.b. ábrán (16. oldal) Grönland erősen torzultan látható a Mercator-vetületben. A Tissot-indikátrix kör alakú, tehát csak területtorzulásra enged következtetni; holott nyilvánvaló, hogy lokálisan sem áll fenn alaktartás. GOLDBERG és GOTT (2007) ennek számszerűsítésére vezette be a *görbültség* és a *ferdültség* fogalmát.

A ferdültség azt mutatja meg, hogy kis ds távolságot megtéve α azimutttal egy gömbi főkör mentén, hányszorosára változik az α irányú l hossztorzulási modulus:

$$\sigma = \frac{1}{l} \frac{dl}{ds} \quad (\text{I.26})$$

Világosan látszik, hogy állandó hossztorzulású vonalak mentén $\sigma = 0$. Lehetetlen olyan vetületet készíteni, melyben minden pontban és irányban $\sigma = 0$. Ez azt jelenté, hogy a hossztorzulás minden pontban és irányban konstans. Akkor viszont a méretarány megfelelő megválasztásával torzulásmentes vetülethez juthatnánk.

A görbültség a merőleges irányú komponenst fogja meg. Itt az a kérdés, hogy a α irányba indulva a geodéziai vonalon, a ds gömbi távolságra átlagosan mekkora $\Delta\alpha'$ (radiánban mért) szögelfordulás jut a térképen:

$$\kappa = \frac{d\alpha'}{ds} \quad (I.27)$$

A definícióból látszik, hogy ha egy geodéziai vonal egyenesre képződik le, akkor e mentén $\kappa = 0$. Azon kívül, ha a geodéziai vonal egy ekvidisztáns, teljes körre (nem csak körívre!) képződik le, akkor e vonal mentén $\kappa = 1/R$. Míg ferdültségmentes vetület nem készíthető, görbültségmentes már igen, de csak a félgömbnél kisebb területre. Ennek oka, hogy az ismert vetületek közül kizárólag a gnomonikus képez le minden geodéziai vonalat egyenesre. Ez viszont síkvetület, ahol a (segéd)parallelkörök, így a (segéd)egyenlítő is kör. Megállapítottuk, hogy ilyen esetekben $\kappa = 1/R$, tehát a (segéd)egyenlítő már nem ábrázolható görbültségmentesen.

I.3.b. A görbültség és ferdültség számítása, tulajdonságai

Megvizsgálva Goldberg-féle mérőszámokat, egy fontos tulajdonságukat vettem észre: Az l hossztorzulási modulus arányszám, és ezért dimenzió nélküli mennyiség. Az itt szereplő deriváltak azonban rendre a dimenziótlan hossztorzulás, illetve szögelfordulás osztva a távolsággal. Következésképp σ és κ 1/ távolság dimenziójúak, mértékegységük van. A továbbiakban az egyszerűség kedvéért, ha e mennyiségek mértékegység nélkül fordulnak elő, akkor a számértékek 1/ földszugár mértékegységben értendők. A szemléletesség kedvéért javasolt mértékegység még a ferdültségre a $\% / 1000 \text{ km}$ és a görbültségre a $^\circ / 1000 \text{ km}$.

Megállapítható, hogy σ és κ nem multiplikatív, hanem additív természetű. Ha egy adott pontban és irányban egy vetület hossztorzulása l_1 , ferdültsége σ_1 , egy másik vetületben ugyanezek az értékek rendre l_2 és σ_2 , akkor a két vetület hossztorzulásai kicsi ds távolságra $l_1(1 + \sigma_1 ds)$ ill. $l_2(1 + \sigma_2 ds)$. A hossztorzulás multiplikatív természete miatt a két vetület egymás utáni alkalmazásával az

új hossztorzulás az eredeti pontban és irányban $l_1 l_2$, míg ds távolságra $l_1 l_2 (1 + \sigma_1 ds + \sigma_2 ds + \sigma_1 \sigma_2 ds^2)$. Az (I.26)-ból következően az új ferdültség $\sigma_1 + \sigma_2$. σ tehát nem exponenciális skálán értelmezett. κ esetén a bizonyítás analóg módon végiggondolható.

A mérőszámok gyakorlati számításához behelyettesítve az l hossztorzulásra kapott (I.6) képletet az (I.26)-ba:

$$\sigma = \frac{1}{l} \frac{2 \frac{d^2 x}{ds^2} \frac{dx}{ds} + 2 \frac{d^2 y}{ds^2} \frac{dy}{ds}}{2 \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}} = \frac{\frac{dx}{ds} \frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{dy}{ds} \frac{d^2 y}{ds^2}}{l^2} \quad (\text{I.28})$$

Egy görbe \mathbf{g} görbülete az általánosan elfogadott definíció alapján az érintő α' irányának deriváltja a síkbeli ds' távolság szerint. Ugyanakkor a görbültség számításához az alapfelületi ds távolság szerinti deriváltra van szükség. A láncszabály alkalmazásával:

$$\kappa = \frac{d\alpha'}{ds'} \frac{ds'}{ds} = \mathbf{g}^l \quad (\text{I.29})$$

Mivel a geodéziai vonalak térképen nem térgörbék, hanem síkgörbék, a görbületet vektor helyett előjeles skalárnak is tekinthetjük. Ekkor a görbület helyére behelyettesíthető annak parametrikus formában adott alakja – a behelyettesítés során kihasználva, hogy a síkgörbét tetszőleges paraméter, így az alapfelületi s távolság segítségével is föl lehet írni:

$$\kappa = l \frac{\frac{dx}{ds} \frac{d^2 y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} \frac{d^2 x}{ds^2}}{\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{dx}{ds} \frac{d^2 y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} \frac{d^2 x}{ds^2}}{l^2} \quad (\text{I.30})$$

κ és σ a φ , λ kezdőpont és α alapfelületi azimut segítségével is kifejezhető. Ehhez a kétváltozós láncszabályt kell alkalmazni, majd a $d\varphi/ds$ és hasonló deriváltak helyére a megfelelő közismert gömbi azonosságokat kell behelyettesíteni (a képletek ezúttal a mértékegységek egyértelmű egyeztetése érdekében R sugarú gömbre, de egységnyi méretarányra vonatkoznak):

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\cos \alpha}{R} + \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\sin \alpha}{R \cos \varphi} \quad (\text{I.31.a})$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\cos \alpha}{R} + \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\sin \alpha}{R \cos \varphi} \quad (\text{I.31.b})$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{ds^2} = & -\frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\operatorname{tg} \varphi \sin^2 \alpha}{R^2} + \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{2 \operatorname{tg} \varphi \sin \alpha \cos \alpha}{R^2 \cos \varphi} + \\ & + \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} \frac{\cos^2 \alpha}{R^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2} \frac{\sin^2 \alpha}{R^2 \cos^2 \varphi} + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi \partial \lambda} \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{R^2 \cos \varphi} \quad (\text{I.31.c}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{ds^2} = & -\frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\operatorname{tg} \varphi \sin^2 \alpha}{R^2} + \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{2 \operatorname{tg} \varphi \sin \alpha \cos \alpha}{R^2 \cos \varphi} + \\ & + \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} \frac{\cos^2 \alpha}{R^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \lambda^2} \frac{\sin^2 \alpha}{R^2 \cos^2 \varphi} + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi \partial \lambda} \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{R^2 \cos \varphi} \quad (\text{I.31.d}) \end{aligned}$$

ahol a parciális deriváltak már φ és λ ismert függvényei.

Goldberg és Gott jóval bonyolultabb módszert ír le a számításhoz, mely inverz vetületi egyenletek ismeretét és Christoffel-szimbólumok kiszámítását igényli. Ezzel szemben a jelen módszerben a parciális deriváltakat akár numerikus módszerrel is lehet közelíteni, a végeredmény kiszámítása egyszerűen implementálható.

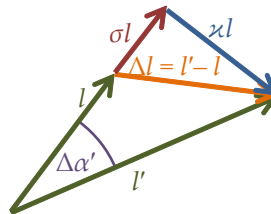
Ezen torzulási jellemzők könnyen belátható tulajdonsága, hogy ha a vetületi egyenletek kétszer differenciálhatók, akkor

$$\kappa(\varphi, \lambda, \alpha) = -\kappa(\varphi, \lambda, \alpha + \pi) \quad \text{és} \quad \sigma(\varphi, \lambda, \alpha) = -\sigma(\varphi, \lambda, \alpha + \pi) \quad (\text{I.32})$$

A görbültség és ferdültség, valamint a vetületi egyenletek második deriváltja között összefüggés mutatható ki:

$$l \sqrt{\kappa^2 + \sigma^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2} \quad (\text{I.33})$$

azaz a görbültség és ferdültség négyzetösszege megegyezik a vetület hossztorzulással normált második iránymenti deriváltjának – mint vektor – négyzetével (I.1. ábra). Ezért a görbültséget és a ferdültséget együtt *másodrendű torzulási modulusoknak* nevezem.



I.1. ábra. A görbültség és ferdültség szemléletes jelentése

Fontos tulajdonsága még ezeknek a mérőszámoknak, hogy értékük hasonlósági transzformációtól független.

A görbültség és ferdültség szempontjából is értelmezhetők a valódi vetületek torzulásmentes vonalai:

- a meridiánban hossztartó, területtartó és szögtartó valódi hengervetületekben az Egyenlítő torzulásmentes;
- a meridiánban hossztartó, területtartó és szögtartó valódi síkvetületekben a pólus torzulásmentes;
- az egy normálparallelkörrel rendelkező valódi kúpvetületek közül a pólusvonalas meridiánban hossztartó, területtartó és a póluspontos szögtartó vetületek normálparallelkörre torzulásmentes. Két normálparallelkörrel rendelkező vagy póluspontos meridiánban hossztartó és területtartó valódi kúpvetületeken nincs triviális összefüggés.

I.3.c. A másodrendű torzulások szemléltetése

A görbültség és ferdültség bemutatására az alább definiált *alakváltozási diagram* nyújt lehetőséget. Az alakváltozási diagram a Tissot-indikátrixszal együtt alkalmazva a vetület összes torzulását bemutatja az adott pontban (I.2. ábra).

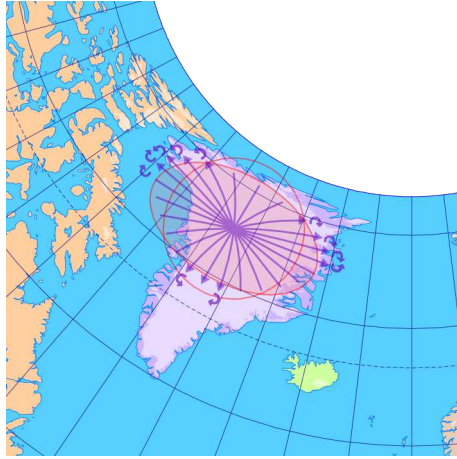
A görbültség jól ábrázolható úgy, hogy a vizsgált ponton áthaladó alapfelületi gömbírókör-sereg képfelületi simulóköreit szerkesztjük a térképre. A simulókör P sugara a görbültség és a hossztorzulási modulus ismeretében egységnyi méretarányban az (I.29) egyenletből:

$$P = \frac{l}{\kappa} \quad (\text{I.34})$$

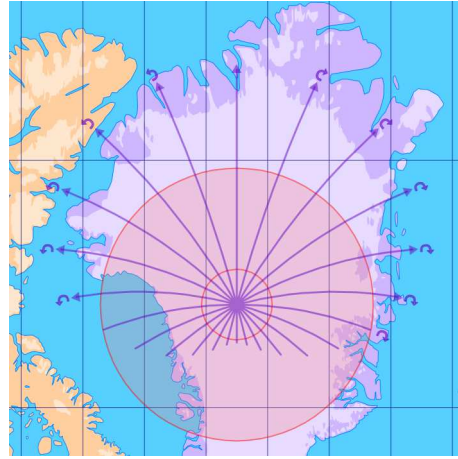
ahol κ mértékegységét egyeztetni kell a térképi koordináta-rendszer mértékegységével.

Legyen a torzulásmentes Tissot-indikátrix térképi sugara S alapfelületi távolságnak megfelelő! Ekkor, ha a geodéziai vonal képének simulóköréből egy egységnyi méretarányban $2/S$ hosszúságú ívdarabot ábrázolunk, akkor az ívhez tartozó szögelfordulás már egyenes arányban lesz a szemléltetni kívánt κ görbültséggel. A görbültséget az ábráról szögmérővel is le lehet olvasni. Ha a körív középponti szöge $\Delta\alpha'$, akkor $\kappa = \Delta\alpha'/(2S)$.

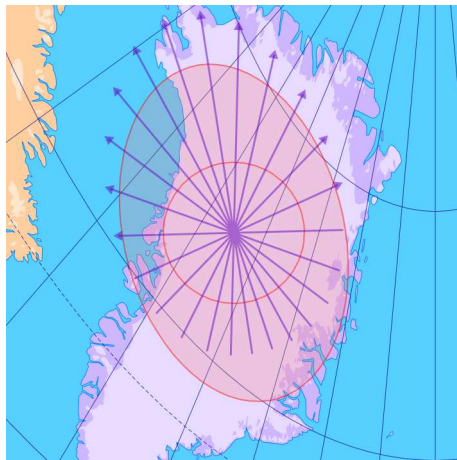
A ferdültséget az ábrázolás az ívdarabok elhelyezésével szemlélteti. Feltételezve, hogy a geodéziai vonal mentén σ állandó, kiszámítható, hogy a S véges hosszúságú



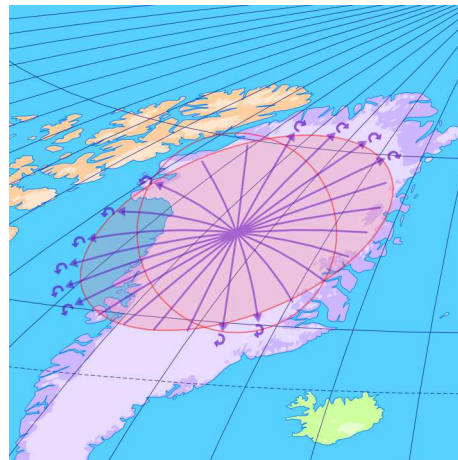
a) Területtartó (Albers) vetületben



b) Szögtartó (Mercator) vetületben



c) Ferdetengelyű gnomonikus vetületben



d) Képzetes (Aitoff) vetületben

I.2. ábra. Alakváltozási diagram és Tissot-indikátrix Grönlandon ($S = R/10 = 637,1$ km)

szakasz képének hossza egységnyi méretarányban:

$$\int_0^S (l + l\sigma s) ds = lS \left(1 + \frac{\sigma S}{2} \right) \quad (\text{I.35})$$

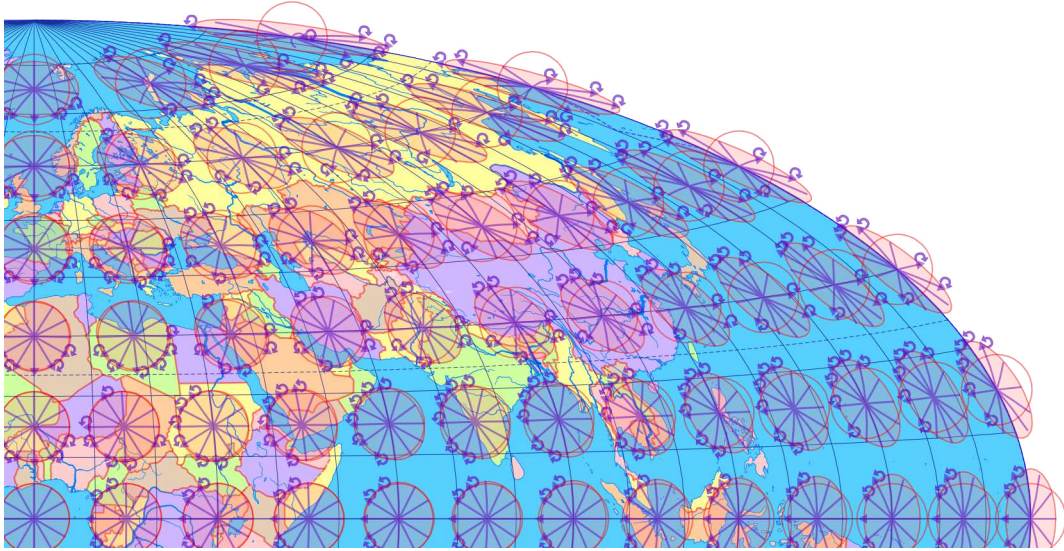
ahol σ és S mértékegységeinek egyeztetésére oda kell figyelni.

A fenti egyenlet csak a megrajzolt ívdarab körív menti eltolását jelenti $l\sigma S^2/2$ -vel – azaz az ábrázolt torzulással egyenes arányban –, annak hossza továbbra is:

$$\int_{-S}^S (l + l\sigma s) ds = 2lS \quad (\text{I.36})$$

Mivel κ és σ az α azimutttal gyorsan változnak, a görbesereget sűrűn, ha a méretarány megengedi, akár 15° -onként célszerű fölvenni. A gyakorlatban alkalmazott vetületek kedvező torzulású részein κ és σ szabad szemmel nehezen látható.

Szükséges ezért a görbültség és a ferdültség irányát nyilakkal túlhangsúlyozni, torzulásmentesség esetén a nyilakat elhagyni (I.3. ábra).



I.3. ábra. A Hammer-vetület torzulásai

Fenti képletek mind feltételezték, hogy a vetület kétszer differenciálható. Bizonyos vetületekben ez nevezetes vonalakon nem teljesül. Az alakváltozási diagram megrajzolásakor külön figyelemmel kell lennünk ezekre a vonalakra. A második derivált megszakadása nem jár feltétlenül töréssel. Például osztott képzetes hengervetületekben az Egyenlítőn és Baranyi IV. vetületében a középmeridiánon sem teljesülnek a fenti azonosságok. Ilyen esetekben a második deriváltak jobb és bal oldali határértékét külön ki kell számolni.

Az alakváltozási diagram Goldbergék eredeti cikkében bemutatott ún. Goldberg – Gott-indikátrixhoz képest több előrelépést tartalmaz:

- nem kell véges idomokat bevenni a számításba, az alakváltozási diagram nem a pont környezetében, hanem pontosan az adott pontban föllépő torzulásokat mutatja be;
- az alakváltozási diagramról a görbültség és ferdültség mértéke közvetlenül, egzakt módon leolvasható;
- nem csak a parallelkörök és a meridiánok irányában ábrázolja a másodrendű torzulásokat.*

* Goldbergék ábráin úgy tűnik, mintha a négyzetes hengervetületben nem lenne ferdültség, holott az csak a vetületi főirányokban nem jelentkezik.

I.3.d. Másodrendű torzultság

A hagyományos torzultságokhoz hasonlóan definiálom a torzultságot a görbültség és a ferdültség esetében is. Mivel ezek a mennyiségek nem exponenciális, hanem lineáris skálán mértek, a logaritmus használata nem indokolt.* Különbség továbbá, hogy a torzulásmentes állapotot a 0 jelzi. Mint statisztikai sokaság, a másodrendű torzulások várhatóértékei kétszer differenciálható vetületek bármely pontjában 0, mely az (I.32) következménye. Értelme van ugyanakkor a statisztikai sokaság szórását vizsgálni, hiszen a várhatóértéktől vett eltérés egyúttal a torzulásmentes állapottól vett eltérés is:

$$E_{\kappa} = \sqrt{\frac{1}{T} \iint_T \varepsilon_{\kappa}^2 dT} = \sqrt{\frac{1}{T} \iint_T \frac{1}{2\pi} \oint \kappa^2 d\alpha dT} \quad (\text{I.37})$$

$$E_{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{T} \iint_T \varepsilon_{\sigma}^2 dT} = \sqrt{\frac{1}{T} \iint_T \frac{1}{2\pi} \oint \sigma^2 d\alpha dT} \quad (\text{I.38})$$

A szögtartó vetületek holomorfak, ezért deriváltjaiknak (mint vektor) nagysága és iránya csak a helytől függenek, a deriválás irányától nem. E miatt szögtartó vetületek bármely pontjában létezik olyan α_0 irány – mely a hossztorzulási modulus gradiensének alapfelületi irányával megegyezik –, hogy $\sigma(\alpha) = \sigma(\alpha_0) \cos(\alpha - \alpha_0)$ és $\kappa(\alpha) = -\sigma(\alpha_0) \sin(\alpha - \alpha_0)$. Ebből pedig világos, hogy szögtartás esetén

$$\frac{1}{2\pi} \oint \kappa^2 d\alpha = \frac{1}{2\pi} \oint \sigma^2 d\alpha = \frac{\sigma^2(\alpha_0)}{2} \quad (\text{I.39})$$

BAJEVA (1987) speciális torzulású – meridiánban hossztartó – vetületekben mutatta ki a szög- és területtorzultság egyenlőségét, melyet annak bizonyítékeként fogadott el, hogy a két mennyiség azonos skálájú, ezeket összegezni lehet. Fenti összefüggés ugyanezt mutatja be a görbültség és ferdültség esetére ezúttal a szögtartó vetületeket tekintve, tehát az ő átlaguk is értelmezhető a hagyományos torzultságok mintájára, kiadva a *globális másodrendű teljes torzultságot*:

$$E_G = \sqrt{\frac{1}{T} \iint_T \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\kappa^2 + \sigma^2}{2} d\alpha dT} \quad (\text{I.40})$$

amely az (I.33) képlet behelyettesítésével egyszerűsíthető.

Mivel a torzultságot a torzulás szórásaként értelmeztük, a torzultság dimenzióval rendelkezik, mely ezúttal is 1/távolság. A hagyományos mérőszámokkal tehát nem összegezhető.

* Mértékegységgel rendelkező mennyiség logaritmusának nincs is definiálva.

I.4. A vetületek csoportosítása, a legjobb kartográfiai vetület fogalma

A vetületeket többek között torzulási jellemzőik szerint szokás csoportosítani. *Területtartó* a vetület, ha minden pontján $\tau = 1$; *szögtartó*, ha $\iota = 1$; *meridiánban hossztartó*, ha $k = 1$; *parallelkörben hossztartó*, ha $h = 1$; *ortogonális*, ha $\Theta = \pi/2$.

Azokat az ortogonális vetületeket, amelyekben a meridiánok képei egyenközűen elhelyezkedő egyenesek, és a parallelkörök képei koncentrikus körök, körívek vagy párhuzamos egyenesek, *valódi vetületnek* nevezzük, a többi leképezés *képzetes vetület*.

A parallelkörök képei párhuzamos egyenesek a *hengervetületekben*, körívek a *kúpvetületekben*, teljes körök a *síkvetületekben*, minden más esetben *egyéb képzetes vetületről* beszélünk. Speciálisan, ha a síkra vetítés során sokszöglapokkal határolt testet használunk közbülső felületnek, *poliéder vetületről* beszélünk.

A pólus pontként jelenik meg a *póluspontos*, vonalként a *pólusvonalas* vetületekben. *Osztott vetületnek* nevezzük azokat a vetületeket, melyek különböző középmeridiánt használó vetületekből lettek összeállítva.

Az alapfelületnek választott gömb minden irányban forgásszimmetrikus, így a pólus megválasztása önkényesnek is tekinthető. Bármely vetület használatakor szélesség és hosszúság helyére behelyettesíthető egy másik, ún. *segédpólusra* vonatkozó *segédszélesség* és *segédhosszúság*. Az átszámítási képletek a [x.](#) oldalon láthatók. Ennek megfelelően a segédkoordináták és a földrajzi koordináták közötti kapcsolat alapján beszélünk *normális* ($\varphi_0 = 90^\circ$), *első transzverzális* ($\varphi_0 = 0^\circ$ és $\lambda_k = 0^\circ$), *második transzverzális* ($\varphi_0 = 0^\circ$ és $\lambda_k = \pm 90^\circ$), *ferde transzverzális* ($\varphi_0 = 0^\circ$), *egyszerű ferdetengelyű* ($\lambda_k = 0^\circ$), *aszimmetrikus ferdetengelyű* ($\lambda_k = \pm 90^\circ$) és *plagális* (egyébként) elhelyezésű vetületről (WRAY, 1974). Valódi vetületek esetében λ_k nem befolyásolja a fókálózat kinézetét, ezért ebben az esetben elegendő egyszerűen a *transzverzális* és *ferdetengelyű* megjelölés.

Bizonyos speciális vetületi tulajdonságok – különösen ideértve az ortogonális és valódi jelzőket – az ilyen elforgatás alkalmazásakor nem a földrajzi, hanem a segédfókálózat képére vonatkoznak. Ennek ellenére ezeket a jelzőket továbbra is alkalmazni lehet.

A vetületek csoportosításához kapcsolódik a *legjobb kartográfiai vetület* vagy más néven *optimális torzulású vetület* fogalma, mely alatt azt a leképezést kell érteni, amely a vetületek egy tetszőleges módon meghatározott csoportján belül egy adott területre vonatkoztatott valamely globális torzultsági mérőszám szerint a lehetséges legkisebb torzulású.

Második fejezet

A vetületi torzulások hatása a térkép olvasójára

II.1. A vetületek és a térképolvasás

Az előbbi fejezetben láthattuk, milyen jellegű torzító hatásokkal kell számolnunk egy vetület alkalmazása esetén. A tapasztalatok azt mutatják, hogy bár bizonyos típusú torzulások külön-külön akár ki is küszöbölhetők, ám ezek mindig egymás rovására történhetnek. Területtartó vetületekben gyakran extrém mértékű szögtorzulások jelentkeznek, szögtartó vetületekben pedig a területtorzulás növekedését tapasztaljuk. A görbültségmentes gnomonikus vetület minden más szempontból az előnytelenek közé tartozik. A poliéder vetületek lehetőséget kínálnak valamennyi torzulás egyidejű csökkentésére, ám ez esetben a vetületi szakadások szaporodnak fel nem kívánt mértékben.

A térképszerkesztő célja, hogy a földrajzi valóságot hitelesen közölje a térkép olvasójával. Ehhez azonban ismerni szükséges, hogy a térkép célcsoportja mely torzító hatásokat képes felismerni és helyesen értelmezni, melyek azok a tényezők, amelyek inkább kerülendőnek mondhatók.

Az utóbbi időben felkapottá vált a térképolvasási készségek mérése kísérleti kartográfiai kutatásokban. A tanszékünkön is folynak ilyen vizsgálatok a *Kísérleti Térképészeti Kutatócsoport* keretében (ALBERT és mások, 2016). Általánosságban elmondhatjuk, hogy ezek a kutatások nagy – legalább 1 : 100 000 – méretarányú térképeket vizsgálnak, ahol a vetületek torzító hatása még nem számottevő. VAKABAJASI (2013) kimutatta, hogy a kis méretarányú térképek olvasása a nagy méretarányúakhoz képest teljesen eltérő készségeket igényel: a kis méretarányú térképek értelmezése mindenekelőtt a földrajzi előismeretektől függ.

A vetületek és a térkép felhasználója közötti kapcsolattal ugyanakkor kevés irodalom foglalkozik. Egy úttörő kutatásban (ŠAVRIČ és mások, 2015) elsőként jártak utána, a térképolvasók véleménye szerint milyen vetületben érdemes világtérképet

készíteni. A kérdőívben nem szerepelt térképolvasási feladat, így az eredmények inkább a felhasználók esztétikai igényét mérték föl. A kitöltők többsége amerikai és indiai származású; lehet, hogy ezért ért el az angolszász gyakorlatban sűrűn használt Robinson-vetület jobb eredményt, mint a kedvezőbb torzulású, inkább Európában kedvelt Winkel III. vetület. Ezt a feltevést alapozza meg a Kísérleti Térképészeti Kutatócsoport egyik eredménye, amely szerint a térképolvasást a kulturális háttér is befolyásolja (ALBERT és mások, 2016). Az itt leírt kutatás kitöltői is adott kultúrkörhöz kötődnek – a kérdőív magyar nyelvű volt –, fontos hangsúlyozni, hogy ezeket az eredményeket is befolyásolhatta a hazai kartográfiai gyakorlat.

Šavričėk kutatása nem tért ki arra a kérdésre, hogy ha egy térkép egy, a felhasználók körében népszerű vetületben van, akkor azt valóban jobban lehet-e használni. Meg kell tehát vizsgálni, hogy a vetület mely torzulási tulajdonságai zavarják meg jobban a felhasználót a helyes ismeretek leolvasásában. Ezért a Kísérleti Térképészeti Kutatócsoport segítségével, Szigeti Csaba doktorandusz társammal egy közös kutatás keretében jártunk utána a kérdésnek (SZIGETI – KERKOVITS, 2018). Jelen fejezet e cikk némileg átdolgozott változata.

Néhány konkrét torzító hatás vizsgálatáról születtek ugyan tanulmányok (ANDERSON – LEINHARDT, 2002; BATTERSBY – MONTELLO, 2009; HRUBY – AVELINO – AYALA, 2016), de ezek közös jellemzője, hogy kevés kitöltővel és kizárólag földrajz szakosok körében dolgoztak. Egy kivétellel mindegyik kérdőívet csak egyetemi hallgatókkal töltették ki. A pontosabb eredmények érdekében szükségesnek tartottuk ezek ellenőrzését szélesebb közönség bevonásával. E mellett további torzulási jellemzőket is meg kívántunk vizsgálni.

II.2. A kutatás menete

II.2.a. A kérdőív

A vetületek értelmezhetőségét kérdőíves formában mértük fel, melyet magyar nyelvű internetes felületen tettünk elérhetővé. A megvalósítás klasszikus kétszerzős munka volt: a vizsgálni kívánt torzulások körét én határoztam meg, de Szigeti Cs. tapasztalatai rengeteget segítettek a kérdések pontos szövegezésében. A kérdőíves felület megvalósítását jómagam, az eredmények tárolását Szigeti Cs. oldotta

meg. Az első kérdéseket, melyek demográfiai adatfelvételt szolgáltak, Szigeti Cs. fogalmazta meg. A korábbi irodalom felkutatása is hasonlóan folyt: míg Szigeti Cs. általában a térképhasználati kérdőívek témakörében keresett kutatásokat, addig én célzottan a vetülettani témájú kísérleteket gyűjtöttem össze.

A kitöltőket kétfelé, *kísérleti* és *kontrollcsoport*-ba osztottuk. A kísérleti csoportnak olyan vetületeket választottam, amelyeken a vizsgált torzulás figyelmen kívül hagyása és a közvetlen leolvasás téves válaszadáshoz vezet. Ezzel szemben a kontrollcsoport térképei az adott szempontból torzulásmentesek, vagy előnyös torzulásúak voltak, valamint igyekeztem számukra olyan vetületet választani, ahol a vetület előnytelenebb tulajdonságai sem ébresztenek bizalmatlanságot. A teszt algoritmusát úgy írtam meg, hogy törekedjen a kitöltőinket a kísérleti és kontrollcsoport között úgy szétosztani, hogy mindkét csoportban lehetőleg azonos arányban szerepeljenek a különböző demográfiai csoportok.

Hét térképolvasással kapcsolatos kérdést tettünk fel. Minden kérdésre egy helyes válasz volt, melyet hat lehetőség közül kellett kiválasztani. A kérdéseket „Nem tudom” válasszal át lehetett ugrani. A kérdések sorrendjét törekedtünk úgy megválasztani, hogy a korábban látott térképek lehetőleg ne befolyásolják a válaszadást. Például a megszokottabb vetületi szakadások helyes értelmezését előbb vizsgáltuk, mint a térkép közepén feltűnőbben jelentkezőkét. A kérdések szövege a két csoportnak azonos volt, de különböző térképek alapján kellett válaszolniuk. A kérdések szövegei és a rájuk adható válaszlehetőségek az [A.](#) függelékben és a [II.3.](#) fejezet ábráin is megtalálhatók. A kitöltőket megkértük, hogy a kitöltés során kizárólag az általunk kiválasztott térképeket használják, segédeszközt ne vegyenek igénybe.

Kísérletünk célja az volt, hogy megvizsgáljuk, mely torzulások esetében mutatható ki szignifikáns különbség a két csoport eredményei között, mert ebben az esetben biztosan kijelenthetjük: a rossz vetületválasztás miatt az olvasó várhatóan helytelen következtetéseket von le a térképről.

II.2.b. Adatgyűjtés

Az adatok gyűjtését 2017. január 23. és április 13. között végeztük. Ez idő alatt az online tesztünkre összesen 322 kitöltés érkezett. Ezek közül 247-et dolgoztunk fel, mert a kitöltések közül Szigeti Cs. kiszűrte a befejezetlen teszteket. Az elfogadható

kitöltési határ minimumát 2 perc 21 másodpercnél, maximumát 14 perc 29 másodpercnél jelölte ki. Az ezeket alul- vagy túllépő tesztkitöltéseket szintén nem vette be a kiértékelésbe. Ennek oka, hogy a túl rövid kitöltési idő tippelésre engedett következtetni, míg a túl hosszú kitöltés a kérdőív időközbeni megszakítását jelezte. Az időkorlátokat az adatsorban látható természetes törések alapján határoztuk meg.

A résztvevőket Szigeti Cs. különböző demográfiai csoportba osztotta be. A pontos részvételi statisztikák az idézett cikkben (SZIGETI – KERKOVITS, 2018) megtalálhatók. Fontos megjegyezni, hogy jelen kutatás feltáró jellegű, és nem volt célja reprezentatív eredmények létrehozása. A kísérlet eredménye az A. függelék végén, a 115. oldaltól látható.

II.2.c. Statisztikai feldolgozás

Az eredményeket kétféle módszertannal is feldolgoztuk. Szigeti Cs. a helyes válaszok arányát hasonlította össze a különböző csoportokban. Meg kellett állapítanunk, hogy az eltérések oka mennyire a mintavétel bizonytalanságában, és mennyire a vetületválasztásban keresendők. Mivel a válasz vagy helyes, vagy helytelen volt, ezért diszkrét eloszlásról beszélünk; de a nagy mintaszám és a *központi határeloszlás tétele* miatt a helyes válaszok eloszlását jó közelítéssel normálisnak vehetjük. Ebben az esetben alkalmazható az ún. *kétoldali t-próba*, mely becslést ad arra nézve, hogy mekkora valószínűséggel van a helyes válaszok eltérő aránya mögött a mintavétel bizonytalansága. Kiugróan alacsony – 5%-nál kisebb – valószínűség esetén Szigeti Cs. az eredményeket kiemelte (II.1. táblázat), és a t-próba szerint *szignifikánsnak* nevezte.

Az így kimutatott eredményeket tovább szerettem volna árnyalni azzal, hogy a helytelen válaszokat nem tekintem egyformán rossznak. Ezt úgy lehetett megvalósítani, hogy minden válaszlehetőséget 1 (legrosszabb) és 6 (legjobb) között rangsoroltam. (Lásd az ábraaláírásoknál!) Ezt követően az ordinális skálákra alkalmazható ún. *kétoldali Mann – Whitney-próba* – a továbbiakban *U-próba* – alapján kiszámítottam annak a valószínűségét, hogy a kísérleti és a kontrollcsoport közül egy-egy alanyt véletlenszerűen kiválasztva a kedvezőtlenebb tulajdonságú vetületet használó, vagyis a kísérleti csoportba tartozó teljesít jobban. A feldolgozás során a kapcsolt rangok – azonos válaszok – és a folytonos eloszláshoz való közelítés miatti korrekciókat figyelembe vettem. Ha ez alapján annak a valószínűsége, hogy

II.1. táblázat. Helyes válaszok aránya demográfiai csoportonként. A kiemelt értékek szignifikánsan jobbakk a t-próba szerint 95%-os szignifikanciaszint mellett (SZIGETI – KERKOVITS, 2018)

	Nemek				Végzettség szerinti kategóriák					
	Férfi		Nő		Alapfokú		Középfokú		Felsőfokú	
	Kísér.	Kontr.	Kísér.	Kontr.	Kísér.	Kontr.	Kísér.	Kontr.	Kísér.	Kontr.
Területtorzulás	30,6%	32,1%	26,6%	30,9%	10,0%	28,6%	25,8%	24,1%	34,4%	40,0%
Meridiánkonv.	83,3%	67,9%	82,8%	72,7%	70,0%	71,4%	79,0%	68,5%	89,1%	72,0%
Ellenmeridián	56,9%	66,1%	50,0%	56,4%	50,0%	57,1%	56,5%	59,3%	51,6%	64,0%
Szakadások	34,7%	51,8%	43,8%	52,7%	50,0%	57,1%	38,7%	57,4%	37,5%	46,0%
Fokhálózat	95,8%	91,1%	95,3%	94,5%	80,0%	100%	95,2%	92,6%	98,4%	92,0%
Pólusvonalak	43,1%	76,8%	20,3%	76,4%	10,0%	100%	29,0%	74,1%	39,1%	76,0%
II. irányred.	47,2%	37,5%	37,5%	41,8%	10,0%	42,8%	38,7%	37,0%	51,6%	42,0%

	Életkor szerinti kategóriák							
	20 év alatt		21–25		26–30		30 év felett	
	Kísér.	Kontr.	Kísér.	Kontr.	Kísér.	Kontr.	Kísér.	Kontr.
Területtorzulás	15,4%	16,7%	20,0%	25,6%	27,3%	39,3%	42,2%	37,5%
Meridiánkonv.	84,6%	83,3%	82,2%	64,1%	78,8%	64,3%	86,7%	78,1%
Ellenmeridián	61,4%	58,3%	64,4%	59,0%	45,5%	64,3%	46,7%	62,5%
Szakadások	38,5%	50,0%	44,4%	56,4%	39,4%	57,1%	33,3%	43,8%
Fokhálózat	84,6%	91,7%	95,6%	89,7%	100%	92,9%	95,6%	96,9%
Pólusvonalak	15,4%	83,3%	33,3%	71,8%	36,4%	71,4%	33,3%	84,4%
II. irányred.	15,4%	41,7%	37,8%	33,3%	36,3%	32,1%	60,0%	53,1%

	Földrajz-földtudományban				Térképolvasási gyakoriság					
	Nem jártas		Jártas		Ritka		Közepes		Gyakori	
	Kísér.	Kontr.	Kísér.	Kontr.	Kísér.	Kontr.	Kísér.	Kontr.	Kísér.	Kontr.
Területtorzulás	22,5%	30,0%	35,4%	33,3%	11,9%	27,0%	38,0%	28,2%	34,1%	40,0%
Meridiánkonv.	81,7%	66,7%	84,6%	74,5%	83,3%	73,0%	80,0%	66,7%	86,4%	71,4%
Ellenmeridián	53,5%	63,3%	53,3%	58,5%	52,4%	59,5%	52,0%	64,1%	56,8%	60,0%
Szakadások	40,8%	53,3%	36,9%	51,0%	31,0%	51,4%	44,0%	48,7%	40,9%	57,1%
Fokhálózat	94,4%	91,7%	96,9%	94,1%	95,2%	89,2%	96,0%	92,3%	95,5%	97,1%
Pólusvonalak	28,2%	80,0%	36,9%	72,5%	31,0%	86,5%	38,0%	66,7%	27,3%	77,1%
II. irányred.	35,2%	40,0%	50,7%	39,2%	33,3%	37,8%	52,0%	43,6%	40,9%	37,4%

II.2. táblázat. Az U-próba eredménye. + jel esetén a kedvezőbb torzulású vetület segített, – jel esetén rontott az eredményeken 95%-os szignifikanciaszint mellett

	Nemek		Végzettség			Földrajz-földtud.	
	Férfi	Nő	Alapf.	Középf.	Felsőf.	Nem jártas	Jártas
Területtorzulás			+			+	
Meridiánkonv.					–	–	
Ellenmeridián							
Szakadások	+						
Fokhálózat							
Pólusvonalak	+	+	+	+	+	+	+
II. irányred.	–		+				–

	Életkor				Térképolvasás		
	20 alatt	21–25	26–30	30 felett	Ritkán	Közepes	Gyakran
Területtorzulás					+		
Meridiánkonv.							
Ellenmeridián							
Szakadások							
Fokhálózat							
Pólusvonalak	+	+	+	+	+	+	+
II. irányred.	+						

a vetületválasztás nem befolyásolta a válaszadást, 5% alatt volt, az eredményeket az U-próba szerint szignifikánsnak neveztem. (II.2. táblázat)

Az említett statisztikai vizsgálatok mélyebb matematikai háttéréről az érdeklődő FIDY és MAKARA (2005) tankönyvében olvashat.

II.3. Feladatok szerinti bontás

II.3.a. Területtorzulás

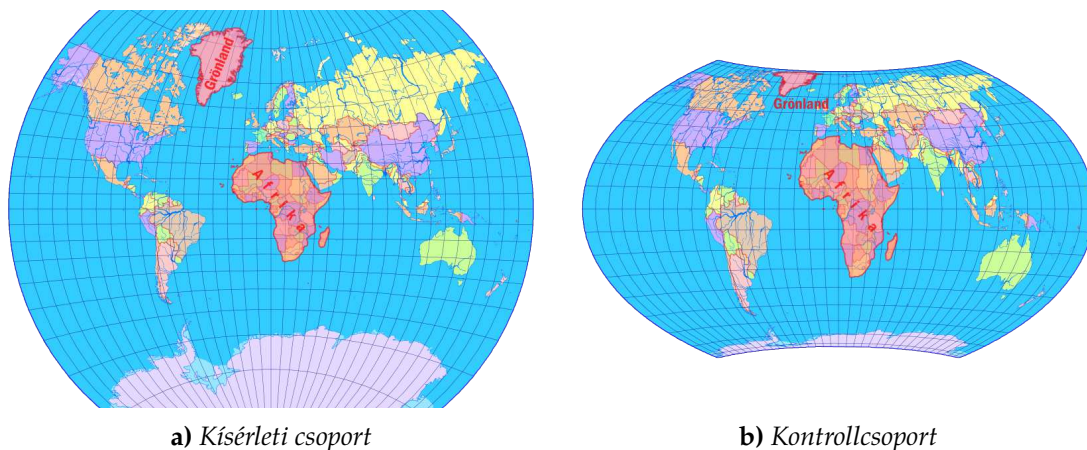
BATTERSBY és MONTELLO (2009) kutatása kimutatta, hogy a térképen található területtorzulásokkal a térképolvások tisztában vannak, sőt az ő felmérésükben a tesztalanyok a torzulásokat túlkompenzálták. Mivel ebben a vizsgálatban kizárólag földrajz szakos hallgatók vettek részt, fontosnak tartottuk az eredmény ellenőrzését szélesebb közönség vizsgálatával.

A fent idézett kutatáshoz hasonlóan a térképi terület leolvasását nem négyzetkilométerben végeztük el, hanem egy referenciafelületet (Grönland) véve egységnek. A kitöltőknek azt kellett megválaszolniuk, hogy Afrika területe hányszorosa Grönlandénak. A két terület különböző földrajzi szélességen helyezkedik el, ezért a gyakorlatban használt vetületeken jelentős különbségek léphetnek fel a méretviszonyokban.

A kísérleti csoport számára Battersbyék a Mercator-vetületet választották, mert az igen népszerű az amerikai kartográfiai gyakorlatban. Ezt a vetületet a magyar térképészek világtérképekre nem szokták alkalmazni, ezért mi a magyar nyelvű világatlásokban elterjedtebb, hasonlóan kedvezőtlen Van der Grinten I. vetületet választottuk (II.1. ábra).

A kontrollcsoport feladatát területtartó térképen végezte. Nem akartuk, hogy a vetület túlzott szögtorzulásai bizalmatlanságot ébresszenek, ezért a világtérképek számára kedvezőbb Wagner-transzformált Hammer-vetületű térképen dolgozhattak (II.1. ábra). A teljesen torzulásmentes földgömb alkalmazására az internetes felület sajátosságai miatt nem volt lehetőség, hiszen a virtuális glóbuszok is csak valamilyen perspektív vetületben jelennek meg a sík képernyőn, melynek torzulásai befolyásolhatták volna a vizsgálatot.

A kísérleti csoport 28,7%-a válaszolt helyesen, miszerint tizenötször nagyobb Afrika Grönlandnál. A leggyakrabban jelölt helytelen válasz, 26,5%-kal az ötszörös



Hányszor nagyobb Afrika területe a valóságban, mint Grönlandé?

egyforma (1)

másfélszer (2)

háromszor (3)

ötször (4)

tizenöttször (6)

huszonöttször (5)

II.1. ábra. A területtorzulást vizsgáló feladat

méretkülönbség volt. Ezzel szemben a kontrollcsoport 31,5%-a jelölte meg a helyes választ, de 33,3%-uk a helytelen, ötszörös méretkülönbséget jelölte meg.

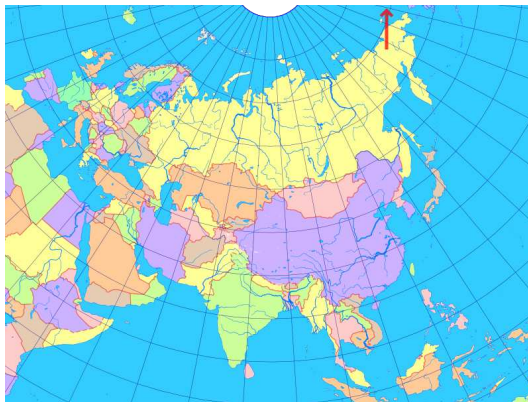
A kitöltők jelentős része tehát alábecsülte Afrika területét, még a területtartó vetületben is kisebbnek gondolták a két terület közti különbséget. Szignifikáns eltérést csak az U-próba mutatott ki az alapfokú végzettséggel rendelkezők, a ritka térképhasználók és a földtudományokban nem jártas kitöltők között. Ezek a csoportok térképolvasás közben feltehetően kisebb mértékben számoltak a vetületi torzulásokkal, az ő esetükben a válaszadók túlnyomó többsége a kísérleti térképről közvetlenül leolvasható másfélszeres vagy az alig kompenzált háromszoros válaszlehetőséget választotta.

II.3.b. Meridiánkonvergencia

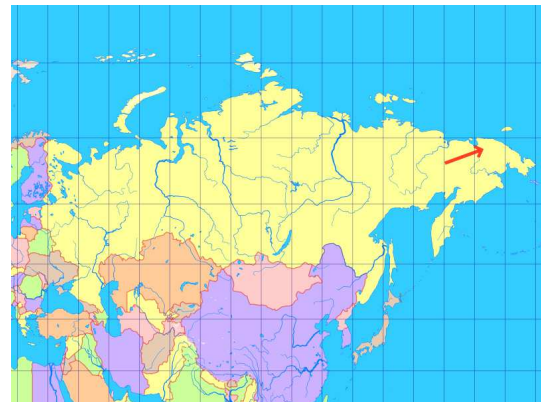
A térképen az irányok elméletileg úgy olvashatóak le, hogy a térkép teteje megegyezés szerint észak felé néz, és a térképolvasó a térkép függőleges tengelyével bezárt szög alapján bármely szakasz azimutját meg tudja becsülni. A gyakorlatban ezt a vetület három tulajdonsága befolyásolja: a vetületi *meridiánkonvergencia* – a sík térkép bizonyos pontjain észak nem pontosan fölfelé van –, az *első irányredukció* – a térképi szögek általában nem egyeznek meg a földi megfelelőjükkel – és a *második irányredukció* – a geodéziai vonalak rendszerint görbe vonalakként jelentkeznek a térképen.

Az irányok helyes leolvasását külön vizsgáltuk kis és nagy távolságoknál, utóbbit az utolsó kérdésben részletezzük. Kis távolságok esetén az első irányredukció elhanyagolható, mert rövid szakaszok irányát regionális térképekről olvashatjuk le, melynek szögtorzulása értelmes vetületválasztás esetén a 10° -ot jellemzően nem haladja meg. A második irányredukció figyelmen kívül hagyása szintén csak néhány fok hibát okoz. Ezzel szemben feladatunkban a meridiánkonvergencia figyelmen kívül hagyása már 60° hibát okoz, mely már kis méretarányú térképek olvasásakor is számottevő.

A nagyjából szélességi kör mentén húzódó Oroszországot kúpvetületben szokás ábrázolni, melyek torzulásai kedvezőknek mondhatók. A magas szélesség és a nagy hosszúságkülönbségek miatt azonban a meridiánok képei erősen összetartanak, a Csukcs-félsziget a térkép szélén *főlkanyarodik*. Az ilyen vetületekben a Csukcsföldön fölfelé mutató nyíl már nem északi, hanem kelet-északkeleti irányba mutat. A kísérleti alanyoknak több lehetőség közül ezt az égtájat kellett megjelölniük. Kísérleti csoportunk ennek megfelelően egy De l'Isle-kúpvetületen dolgozott, az I. irányredukciót (3°) elhanyagoltuk (II.2. ábra).



a) Kísérleti csoport



b) Kontrollcsoport

Milyen égtáj felé mutat a piros nyíl Csukcsföldön?

észak (4)	dél-délnyugat (1)	kelet (5)
északnyugat (3)	dél (2)	kelet-északkelet (6)

II.2. ábra. A meridiánkonvergencia hatását vizsgáló feladat

A normális elhelyezésű valódi hengervetületeken a meridiánok nem konvergálnak. Ha emellett a szögtartást is kikötnénk, Mercator vetületét kapnánk, mely ilyen magas szélességeken alkalmazhatatlan. Így a kontrollcsoportnak Gall kváziperspektív hengervetületét választottuk, melynek torzulásai kevésbé zavaróak, és az I.

irányredukció (7°) ismételten elhanyagolható (II.2. ábra). A nyíl ebben az esetben értelemszerűen már nem fölfelé mutatott.

A kísérleti csoport 83%-a jelölte meg helyesen, hogy a nyíl kelet-északkelet felé mutat. A többi lehetőséget közel azonos arányban jelölték a kitöltők. Ezzel szemben, a kontrollcsoport 70,3%-a jelölte meg a helyes választ, és a csoport tagjainak 13,5%-a helytelenül az északot jelölte meg.

A Szigeti Cs. által végrehajtott t-próba és az általam számított U-próba lényegében azonos mintázatot mutat, és megerősíti a korábbi cikkben állítottakat. Minden csoport esetén a megszokott vetületben lévő kísérleti térképeket használók értek el jobb eredményt, mint a szokatlanabb megjelenésű kontrolltérképeket használók. Az U-próba értéke a legtöbb csoportnál megközelítette a kritikus értéket, ám azt csak a felsőfokú végzettségűek és a földrajzban nem jártas kitöltők esetén haladta meg.

A kedvező vetület inkább hátráltatta mintsem segítette a térkép értelmezését. Az eredmények azt mutatják, hogy a meridiánkonvergencia nem zavarja az iránymeghatározást, mivel a térképolvasók a fókálózatot használják segítségként. Ugyanakkor a kontrolltérkép vetületének szokatlan ábrázolásmódja megzavarhatta a térképolvasást.

II.3.c. Szakadások az ellenmeridiánon

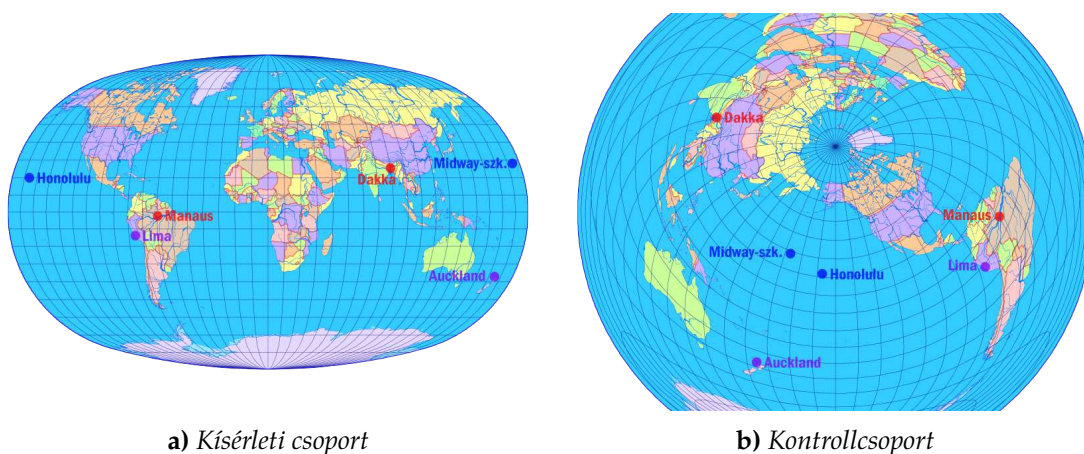
A legtöbb vetület az ellenmeridiánt kétszeresen képezi le a síkra úgy, hogy ezen vonal képei adják a térkép keleti és nyugati kontúrvonalát. E miatt az ellenmeridián közelében, a valóságban kis távolságokra elhelyezkedő pontpárok a térkép átellenes pontjaira képződnek le, rontva a globális kapcsolatok szemléletes megjelenítését.

Egy közelmúltban megjelent dolgozatban (GOTT – MUGNOLO – COLLEY, 2007) kiszámolták azt a vetületet, amely globális távolságokat a lehető legkisebb hibával képezi le. A kutatók – bár ezt maguk nem vették észre – gyakorlatilag a Ginzburg-sor egyik vetületét kapták eredményül, melyről már régóta ismert, hogy optimális torzulású (TOLSZTOVA, 1969). Gotték a számítás során az ellenmeridián közelében lévő pontokat is egyenes vonallal, a teljes térképen keresztül kötötték össze, ezzel impliciten feltételezve, hogy a térképolvasó sem helyesen, a térkép szélén keresztül, két szakaszban becsli a távolságot. Hiányzott azonban ezen feltételezés megalapozása.

Az ellenmeridián hatását tényleges kísérletekkel csak később vizsgálták (HRUBY – AVELINO – AYALA, 2016). A kutatás ebben az esetben is kizárólag földrajz szakos

hallgatók bevonásával történt, így indokolt annak kiterjesztése szélesebb közönségre. A kísérleti alanyok Gotték feltevésével ellentétben helyes irányba kötötték össze a pontpárokat, az átlagos távolságbecslési hiba nem haladta meg a 2%-ot, melybe az erősen torzító négyzetes hengervetület hatása is beleszólhatott. Ezzel együtt Hruby kutatócsoportja bizonyította az ellenmeridián zavaró hatását, mert kísérletükben szignifikánsan jobban teljesítettek azok a hallgatók, akiknek a távolságokat nem a vetület ellenmeridiánján keresztül kellett mérni.

Mivel mi nem akartuk, hogy a vetület más torzító hatásai befolyásolják az eredményt, kísérletünket Baranyi IV. vetületén végeztük, mely az egész bolygóra nézve kedvezőnek mondható és elterjedt a magyar gyakorlatban (II.3. ábra). A résztvevőknek három pontpárt kellett sorba rendezniük azok valós földi távolsága szerint. A három pontpárból kettőt az ellenmeridiánon kellett összekötni, de csak egy pontpárt helyeztünk annyira közel az ellenmeridiánhoz, hogy azok ilyen módon történő helyes összekötése magától értetődő legyen.



Rendezze a valós földi távolság szerint növekvő sorrendbe a pontpárokat (a legközelebbitől a legtávolabbiig)!

<i>Auckland–Lima; Dakka–Manaus; Midway-szk.–Honolulu (2)</i>	<i>Dakka–Manaus; Auckland–Lima; Midway-szk.–Honolulu (1)</i>	<i>Auckland–Lima; Midway-szk.–Honolulu; Dakka–Manaus (4)</i>
<i>Midway - szk. – Honolulu; Auckland – Lima; Dakka – Manaus (6)</i>	<i>Dakka–Manaus; Midway-szk.–Honolulu; Auckland–Lima (3)</i>	<i>Midway-szk.–Honolulu; Dakka–Manaus; Auckland–Lima (5)</i>

II.3. ábra. Az ellenmeridián hatását vizsgáló feladat

A kontrollcsoport a szakadást csak egyetlen pontban tartalmazó, a földi távolságokat optimálisan ábrázoló Ginzburg-féle síkvetületet (GOTT – MUGNOLO – COLLEY, 2007) kapta. A vetületet ferdetengelyű elhelyezésben alkalmaztuk, hogy a vizsgált pontokon ne lépjen föl bizalmatlanságot ébresztő torzulás (II.3. ábra).

A kísérleti csoport 53,7%-a adott helyes választ. A kontrollcsoport esetében a résztvevők 61,3%-a jelölte meg a helyes választ. A leggyakoribb hiba az Auckland–Lima távolság helytelen értelmezéséből fakadt (l. II.3. ábra): a kísérleti csoport 25,0%-a az ellenmeridiántól távol eső pontokat már nem a térkép szélén keresztül, hanem a belső területén keresztül kötötte össze, és az így messzebbinek tűnt, mint a közel ellenlábás Dakka és Manaus távolsága. A kontrollcsoport esetén ez a hiba kevésbé jellemző, csak 12,6% volt.

Egyik csoportnál sem vehető észre szignifikáns különbség a kísérleti és kontrollcsoportok közt. Észrevehető, hogy a többi korcsoporttal ellentétben a 25 év alattiaknál a kísérleti csoport teljesített jobban.

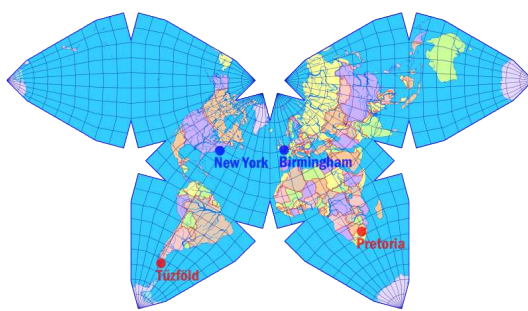
Az ellenmeridiánon fellépő szakadást HRUBY, AVELINO és AYALA (2016) egy pszichológiai határnak tartja. Ezzel szemben az eredményeink ennek ellenkezőjét mutatják: egyik csoportnál sem lépett fel szignifikáns különbség a kísérleti és kontrollcsoport eredménye között. Bár néhány kitöltőt nagy távolságok esetén valóban megzavart az ellenmeridián kétszeri megjelenítése, de a vártnál jelentősen kisebb eltérés volt a két vetület esetében.

II.3.d. Szakadások a térkép belsejében

Bár a térképi ábrázolás folytonossága a legtöbb vetületben csak az ellenmeridián mentén szakad meg, a torzulások csökkentése céljából előfordulhatnak még további helyeken is szakadások. Származtatásuktól függően osztott vagy poliéder vetületeknek hívjuk az ilyen leképezéseket. Jó marketingképességekkel rendelkező nem szakmabeliek időről-időre „fölfedezik” a poliéder vetületek kedvezőbb torzulásaiban rejlő lehetőségeket, melyet a bulvármédia szívesen fölkap. Ezt követően a térképész szakma részéről rendszerint negatív válasz érkezik, melyben jelzik, hogy a poliéder vetületek kisebb torzultságáért cserébe a térkép szerkezete szétesik, egymáshoz a valóságban közel eső objektumok a térképen egymástól messze kerülnek. A tudományos vita jelenleg is zajlik (BÖHM – KOCH – STAMS, 2017).

Ugyan Hrubyék korábban említett dolgozatából kiderül, hogy a szakadások kis mértékben megzavarják a térképolvasót a távolságbecslésben, meg kívántuk határozni, hogy poliéder vetületek szakadásai a szokványos szakadásoktól eltérően befolyásolják-e a térképolvasást.

A kísérleti csoport térképvetületének Waterman pillangóvetületét választottuk, melynek alkotója szintén nem térképész, ugyanakkor a vetület megfelel a vetülettan hagyományos előírásainak (szimmetrikus fókálózat, explicit képletekkel felírható szerkesztési utasítás), torzulásai kedvezőek (II.4. ábra). A kitöltőknek egy szakadást nem keresztező szakaszt (New York–Birmingham) egységnek véve kellett egy szakadást keresztező szakasz (Pretoria–Tűzföld) hosszát meghatározniuk. A kontrollcsoport tagjai ugyanezt a feladatot az alig kedvezőtlenebb, de szakadást nem tartalmazó Winkel III. vetületben oldották meg (II.4. ábra).



a) Kísérleti csoport



b) Kontrollcsoport

Melyik állítás helyes a légvonalban mért távolság figyelembe vételével?

Tűzföld és Pretoria között a távolság közel ugyanakkora, mint New York és Birmingham között. (4)

Tűzföld és Pretoria között a távolság kb. háromszor nagyobb, mint New York és Birmingham között. (2)

Tűzföld és Pretoria között a távolság mintegy másfélszer nagyobb, mint New York és Birmingham között. (6)

New York és Birmingham között a távolság mintegy másfélszer nagyobb, mint Pretoria és Tűzföld között. (3)

Tűzföld és Pretoria között a távolság nagyjából kétszer nagyobb, mint New York és Birmingham között. (5)

New York és Birmingham között a távolság nagyjából háromszor nagyobb, mint Pretoria és Tűzföld között. (1)

II.4. ábra. A szakadások hatását vizsgáló feladat

A kísérleti csoport 39%-a jelölte meg helyesen, hogy másfélszeres a különbség a két távolság közt. A leggyakoribb helytelen választ, miszerint a távolság közel egyforma, a csoport 31,6%-a jelölte meg. Ezzel szemben a kontrollcsoport 52,3%-a becsülte meg helyesen a távolságot, és 27%-uk gondolta azonosnak a két távot.

A demográfiai változókat figyelembe véve is minden esetben jobban teljesített a kontrollcsoport. A középfokú végzettségűek esetében ez a t-próba szerint, míg a férfiak körében az U-próba szerint szignifikáns eltérést mutat.

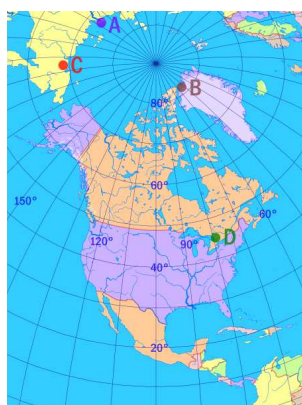
GOTT, MUGNOLO és COLLEY (2007) véleménye szerint ugyanannyira nemkívánatos, ha két pont egy szakadás miatt kerül messze egymástól, mint ha a vetületi

hossztorzulások okoznának ugyanekkora távolságnövekedést. Más szerzők ezzel egybehangzóan az állítják, a térképkereten keresztül mért távolságokat a térképolvasók jellemzően felülbecsülik (HIRTLE – JONIDES, 1985; HRUBY – AVELINO – AYALA, 2016). Ezzel az eredményeink ellentmondanak, ugyanis leginkább az alábecslés volt a jellemző hiba a kísérleti térképen. Eredményeinkből arra lehet következtetni, hogy a szakadások nem a korábbiakban feltételezett módon, hanem a szakadások okozta távolságnövekedést túlkompenzálva rontják a távolságbecslést.

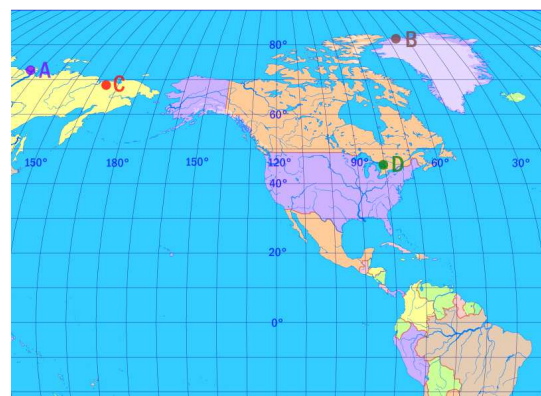
II.3.e. Földrajzi övezetesség

A térképolvasói preferenciák tekintetében kimutatható, hogy az egyenes szélességi körök kedveltebbek a görbékénél (ŠAVRIČ és mások, 2015), bár a felmérés csak világátérképekre terjedt ki. Az egyenesre képződő szélességi körök vitathatatlan előnye, hogy szemléletesen mutatják be a földrajzi övezetességet.

Feladatunkban északról dél felé haladva kellett négy pontot sorba rendezni. A kísérleti csoport ferdetengelyű Lambert-síkvetületet kapott (II.5. ábra). A vetület fontos tulajdonsága, hogy lehetőség van a pontként megjelenő póluson túli terület ábrázolására. A térképen elhelyeztünk pontot az Északi-sark képén túl is. A kontrollcsoport ugyanezen pontokat a földrajzi övezetességet megőrző Kavrajcszkij VII. vetületében rendezte sorba (II.5. ábra). A vetület a gyakorlatban használt képzetes hengervetületek közül a legelőnyösebbek közé sorolható.



a) Kísérleti csoport



b) Kontrollcsoport

Rendezze sorba a pontokat a legészakabbtól a legdélebbi felé haladva!

A B C D (4)

A C B D (2)

B A C D (6)

B C A D (5)

C D A B (1)

C B A D (3)

II.5. ábra. A fokhálózat értelmezését vizsgáló feladat

A kísérleti csoport 95,6%-a jelölte meg a helyes, B-A-C-D választ. Hasonlóan kiugró eredmény született a kontrollcsoport esetében, mivel 92,8%-uk jelölte meg a helyes választ.

Összességében egyik csoportban sem volt számottevő különbség a két vetület között. Kísérleti alanyaink a földrajzi viszonyok értelmezéséhez a fokhálózatra támaszkodtak.

II.3.f. Pólusvonal

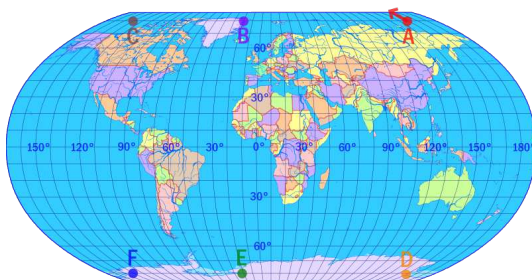
A magyar iskolai atlaszok piacát hosszú éveken keresztül uraló Kartográfiai Vállalat és jogutódjai kerültek a pólusvonalas térképek alkalmazását iskolai kiadványokban. Világtérképeken jellemzően Baranyi IV. vetületét alkalmazták, mely kedvező torzulású és póluspontos. A tankönyvpiac 2016-os államosítását követően az új iskolai atlaszokat a Stiefel Kft. készíti, a világtérképeket pólusvonalas Winkel III. vetületűekre cserélték (FÁBIÁNNÉ MERK és mások, 2016). A hagyományokkal történő szakítás apropóján felmértük, a térképolvasók tudják-e egyáltalán, mi a pólusvonal.

Egy korábbi felhasználói teszt (ŠAVRIČ és mások, 2015) alapján a térképhasználók nem tartják szokatlannak a pólusvonal jelenlétét, nem mutatható ki szignifikáns preferencia sem a póluspontos sem a pólusvonalas térképek iránt. Kérdőívünkkel utánajártunk, hogy a megszokottsághoz hozzátartozik-e a helyes értelmezés.

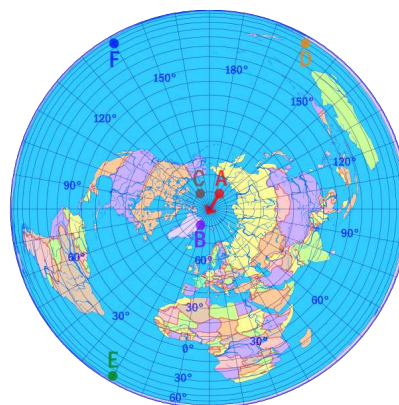
Pólusvonalas Robinson-vetületű térképünkön egy a pólusvonal felé álló nyilat követve kellett megmondani, a térképen megjelölt hat pont közül melyiket érintenénk először (II.6. ábra). Félrevezetésnek az átellenes pólusvonal közelében is helyeztünk el pontokat. A kontrollcsoport a pólus környéki viszonyokat jobban szemléltető Lambert-síkvetületen dolgozott (II.6. ábra).

A kísérleti csoport 32,4%-a jelölte meg a helyes, B választ. Ugyanennyi kitöltő jelölte meg a C lehetőséget, valamint 21,3% a D-t jelölte válaszul. A kontrollcsoport esetében a résztvevők 76,6%-a adott helyes választ.

Minden demográfiai változó és mindkét értékelési módszer szerint szignifikáns különbség lépett fel a kísérleti és kontrollcsoport között. Kivétel nélkül jobb teljesítményt nyújtottak ennél a kérdésnél a kontrolltérképet használók. Ugyanakkor érdekes különbséget tapasztaltunk a nemek között a kísérleti (pólusvonalas) térkép olvasásában. A feladatot a férfiak 43,1%-a, míg a nőknek csupán 20,3%-a oldotta



a) Kísérleti csoport



b) Kontrollcsoport

Ha az A pontból hosszúsági kör mentén, a piros nyíl irányába indulunk, akkor a térkép melyik pontját érjük el először?

Vissza az A-ra (4)

B (6)

C (5)

D (2)

E (3)

F (1)

II.6. ábra. A pólusvonal hatását vizsgáló feladat

meg helyesen. A D választ megjelölők (akik szerint az északi pólusvonalon kilépve a déli pólusvonalra érkezünk) túlnyomó többsége (75,9%) nő volt. A kontroll térképen a nemek között már nem volt ilyen eltérés. Ennél a feladatnál az U-próba valószínűségi értéke a 0,005% alatt volt több demográfiai csoportnál is.

Ez egyértelműen mutatja, hogy a magasabb szélességeket ábrázoló térképeken a póluspontos ábrázolás az ideális megoldás. Ennek fényében érdemes megjegyezni, hogy az újabb iskolai atlaszokban használt világvetület az eredményeink alapján rontja a póluskörnyéki területek értelmezését.

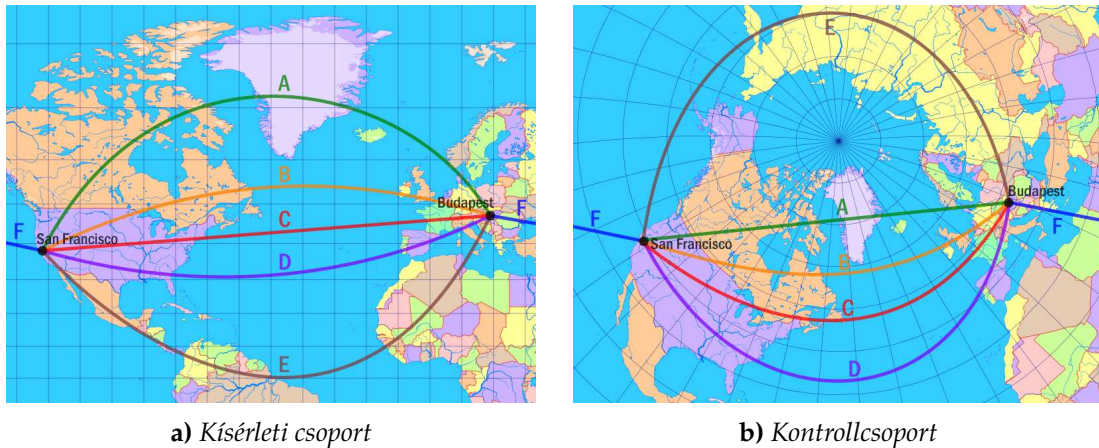
II.3.g. II. irányredukció

Utolsó kérdésünkben azt kívántuk fölmérni, hogy a térképolvasók mennyire vannak tisztában a geodéziai vonalak térképi görbültségével. Kis méretarányú térképeken hatalmas távolságok is jelen lehetnek, ezért a vetületi síkban mért irányokat a geodéziában szokásosnál nagyságrendekkel erősebben terheli a második irányredukció, feladatunkban 75° körüli értéket vett fel.

A világtérképeken szereplő geodéziai vonalak térképi futása rendkívül bonyolult, lehet egyszerű görbe, de az Egyenlítőt keresztező geodéziai vonalak gyakran tekervényes S-alakban képződnek le. Egy földrajz szakos hallgatókat és tanárokat érintő hangos gondolkodás módszert alkalmazó vizsgálat (ANDERSON –

LEINHARDT, 2002) kimutatta, hogy az ismeretek különösen az egyetemi kutatók körében silányak. Az északi féltekén teljesítettek jobban a résztvevők, mert ez gyakrabban szerepel a példákban, és az erősebb repülőforgalom miatt több a személyes tapasztalat. A tanulmányban nem szerepelt kontrollcsoport.

Vizsgálatunk az előítéletektől terheltebb északi féltekén folyt, San Francisco és Budapest között kellett a legrövidebb útvonalat a térképről leolvasni. Hat, előre fölrajzolt útvonal közül lehetett választani, melyek közül egy félrevezető módon a térkép szélén keresztül kötötte össze a városokat. A térkép Miller hengervetületében készült, melyen a meridiánkonvergencia egyáltalán nem, az I. irányredukció elhanyagolható mértékben torzítja az irányokat (II.7. ábra).



Melyik útvonalon kell Budapestről San Francisco felé repülőgéppel utazni, ha a legrövidebb utat választjuk?

A (6)	B (5)	C (4)
D (3)	E (2)	F (1)

II.7. ábra. A II. irányredukció hatását vizsgáló feladat

A kontrollcsoport térképét azért nem a II. irányredukciótól mentes gnomonikus vetületben rajzoltuk, mert ennek hossztorzulásai bizalmatlanságot kelthettek volna, és az I. irányredukció is zavaró mértékű ekkora távolságnál. Elégségesnek gondoltuk ferdetengelyű valódi síkvetület alkalmazását a geodéziai vonal felezőpontjában fölvelt segédpólussal, mert így a vizsgált szakasz egy egyenesre leképeződő segédmeridián lesz. A többi torzulást Airy legkisebb torzulású síkvetületének alkalmazásával hoztuk egyensúlyba (II.7. ábra). A vetület tulajdonságai miatt nem volt megoldható, hogy a két csoportnál az „E” válaszlehetőség ugyanazon az útvonalon fusson, de itt is ez a válaszlehetőség volt a leghosszabb útvonal.

A kísérleti csoport 42,6%-a jelölte meg a helyes, A választ. A leggyakoribb helytelen válasz a C lehetőség volt, 25,7%-kal. A kontrollcsoport 39,6%-a jelölte meg a helyes választ, a leggyakoribb helytelen válaszra (azaz a C-re) pedig 36,9%-uk kattintott.

Ennél a kérdésnél csak az U-próba jelzett szignifikáns különbségeket a kísérleti és kontrollcsoport eredményei közt. Az életkori kategóriák esetében a 20 év alattiak szignifikánsan jobban teljesítettek a kontrolltérképeken. Ez a tendencia a 25–30 év közöttiek esetében átfordul, és a kísérleti csoport eredménye lesz jelentősen jobb, megközelítve az U-próba kritikus értékét. A korcsoportokhoz hasonlóan alakult a különböző iskolai végzettségűek eredménye: míg az alapfokú végzettségűek esetében a kontrollcsoport ért el szignifikánsan jobb eredményt, addig a felsőfokú végzettségűek esetében a kísérleti csoport teljesített jobban, szintén alig maradva el a szignifikancia szempontjából kritikus értéktől. A földrajz- és földtudományokban tapasztaltak és a férfiak körében már a kísérleti térképeken értek el szignifikánsan jobb eredményt a kitöltők.

A kontrollvetület némely csoportoknál inkább hátráltatta, mint segítette a helyes értelmezést. A szögtartó világtérképek gyakori alkalmazása miatt a térképhasználók megszokták, hogy a térképi egyenes a valóságban nem az. Ugyanakkor a fiatalok, az alapfokú végzettségűek, a földrajzban nem képzettek és a nők épp ellenkezőleg, hasznát tudták venni a kisebb torzulású vetületnek. Összességében tehát megállapítható erről a feladatról, hogy a tapasztaltabb térképolvasók már a „helyes” térképet sem voltak hajlandók torzulásmentesnek elfogadni. Ők akkor is igyekeztek kiküszöbölni a megszokott torzulást, amikor az nem is lépett fel az adott térképen.

II.4. Következtetések

Az eredmények több esetben is alátámasztják VAKABAJASI (2013) felvetését, miszerint a kis méretarányú térképek értelmezése tanult folyamat eredménye. Minél gyakrabban lát a térképolvasó adott tulajdonságú térképeket, annál erősebb preconcepció alakul ki benne a „helyes” térképekről. Ennek alapján a vetületválasztás szerepe is megnő, mivel az nem kizárólag esztétikai kérdés marad, hanem a térképolvasók világról alkotott szemléletét is befolyásolhatja.

Az eredmények azt mutatják, hogy a fiatalabb korosztályt (20 év alattiak) jelentősebben befolyásolta az alkalmazott vetület, ami azt mutatja, hogy kevesebb előítélettel rendelkeznek a vetületeket illetően. Ez azt jelenti, hogy a fiatalok esetében különösen jelentős a térképszerkesztők feladata, hiszen könnyebben befolyásolható ennek a célcsoportnak a világképe. Ugyanakkor meg kell jegyezni, hogy jelen csoport alacsony létszáma befolyásolhatta a kutatási eredményünket.

Az említett előítélet leglátványosabban a földrajz- földtudományokban tapasztalt kitöltőknél jelent meg: ők általában a megszokott vetületeken tudtak jól teljesíteni, a nem szokványos, kisebb torzulású vetületeken a teljesítményük kissé el is maradhatott tapasztalatlan társaiktól.

A pólusvonal jelenléte zavarta meg a legjobban kitöltőinket. A pólusvonalas vetületeket csak abban az esetben javasolhatjuk, ha a térkép tematikája nem terjed ki magas szélességekre és a pólusvonalas térkép torzulásai jelentősen kedvezőbbek lennének a megfelelő póluspontos térképnél.

Harmadik fejezet

A torzulások csökkentése numerikus módszerekkel

Láttuk, hogy a térképolvasást pozitívan befolyásolhatja egy jó vetületválasztás. Van tehát értelme kis torzulású vetületek előállításának. Alábbi fejezetben olyan numerikus módszereket gyűjtök össze, amelyek megfelelő paraméterezéssel alkalmasak a legjobb kartográfiai vetületek közelítésére.

III.1. A torzultság számítása szabálytalan felületeken

A globális torzultságot az [I.2.c.](#) fejezetben a lokális torzultságok négyzetes átlagaként értelmeztük. A pontról pontra folytonosan változó ε^2 lokális torzultság területre vonatkozó átlagát felületi integrállal kaptuk meg az [\(I.21\)](#)-ben.

Ha a felület szabályos (pl. foktrapéz), akkor a felületi integrál könnyedén átalakítható kettős integrállá. Azonban a gyakorlatban ábrázolni kívánt földrajzi objektumok alakja jellemzően nem írható fel ilyen egyszerűen, a szabálytalan felületek közelítése szabályos alakzattal igen bonyolult felületek (pl. Atlanti-óceán) esetén pontatlan eredményre vezet. Szükséges tehát egy módszer, amellyel numerikusan meghatározható az integrál értéke tetszőleges alakú gömbi felületekre.

III.1.a. Korábban alkalmazott módszerek

A szabálytalan felületeken megjelenő átlagos torzultság kérdését már korábban is vizsgálták (KIMERLING – OVERTON – WHITE, [1995](#)). A szerzők két vetület szögtorzultságát hasonlították össze az Egyesült Államok területén. A felületi integrált két módon számolták:

Először a vizsgált területet szabályos rácshálóval fedték le. Azokra a rácspontokra, amelyek a felületen belül estek, a rácsponthoz tartozó felületdarab méretével súlyozva átlagolták a torzultságot.* Az eljárás hátránya az, hogy ha egy rácspont

*Ez gyakorlatilag az egydimenziós téglalapmódszer általánosítása szabálytalan felületre; hasonló módszert TUTIĆ ([2009](#)) is alkalmazott ellipszoid alapfelületre Horvátország területén.

éppen hogy beleesik egy felületbe, a teljes hozzá tartozó felületet figyelembe vettük, még akkor is, ha annak nagyobb része a határon kívül esik. Ugyanakkor ha éppen kívül esne egy rácspont a vizsgált felületen, akkor azt nem veszi figyelembe a számítás, noha lehet, hogy a hozzá tartozó felületdarab nagy része éppen vizsgált sokszög területére esik. Ezáltal a felületet gyakorlatilag egy lépcsős alakzattal közelítjük. Ennek megfelelő finomítása és a téglalapmódszer közismert pontatlansága miatt szükségtelenül nagy rácssűrűség kell a megfelelő pontossághoz.

A másik lehetőség, melyet a szerzők próbáltak, a Monte Carlo típusú integrálás. Ennek lényege, hogy véletlenszerű pontokat választunk a vizsgált sokszög területén belül úgy, hogy annak gömbi felületén egyenletes valószínűséggel helyezkedjenek el. Ezt követően a véletlen pontokban vett lokális torzultságok egyszerű átlagát vesszük. Előnye, hogy a szabályos ráccsal szemben nem közelítettük az alakzatot, ugyanakkor a számítás minden futtatása megismételhetetlen. Ezen kívül a Monte Carlo integrálás hírhedt lassú konvergenciájáról, ez is nagyon sok pontban igényel mintavételezést.

Ide tartozik még CANTERS (2002) Európa-térképe. Ő az (I.24)-hez hasonló* torzultságot minimalizált. Ehhez nagy mennyiségű véges szakaszt vett föl véletlenszerűen, melyekről kikötötte, hogy mindkét végpontjuk az EU-n belül essen. A módszer hasonlít a Monte Carlo integrálásra, viszont a III.4.c. fejezetben látni fogjuk, hogy nem közelíti hatékonyan a terület alakját.

III.1.b. A Simpson-formula kiterjesztése szabálytalan felületre

Az egyváltozós, folytonosan differenciálható függvények határozott integrálját a fent említett téglalap- és Monte Carlo módszernél jóval hatékonyabban tudjuk közelíteni az ún. Simpson-formulával, amelynek képlete (PRESS, 2002):[†]

$$\int_{\eta}^{\chi} f(x) dx = \sum_{i=1}^m \int_{\eta+(i-1)\frac{\chi-\eta}{m}}^{\eta+i\frac{\chi-\eta}{m}} f(x) dx \approx$$

$$\approx \frac{\chi-\eta}{6m} \left[f(\eta) + 4 \sum_{i=1}^m f\left(\frac{[2i-1][\chi-\eta]}{2m}\right) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f\left(\frac{i[\chi-\eta]}{m}\right) + f(\chi) \right] \quad (\text{III.1})$$

* Canters logaritmus helyett törtfüggvényt használt a véges torzultság számításához.

[†] A Simpson-szabály már régóta ismert. KEPLER (1615) könyvében is találunk példát az alkalmazására. Kepler a fölhasznált képletet Arkhimédésznek tulajdonította.

Ezt fölírtam az F foktrapézra, melyet a φ_D, φ_E szélességek és λ_{Ny}, λ_K hosszúságok határolnak (KERKOVITS, 2017b):

$$\iint_F f(\varphi, \lambda) dF \approx \frac{\varphi_E - \varphi_D}{6m} \left[\int_{\lambda_{Ny}}^{\lambda_K} f(\varphi_D, \lambda) \cos \varphi_D d\lambda + 4 \sum_{i=1}^m \int_{\lambda_{Ny}}^{\lambda_K} f(\varphi_i, \lambda) \cos \varphi_i d\lambda + \right. \\ \left. + 2 \sum_{j=1}^{m-1} \int_{\lambda_{Ny}}^{\lambda_K} f(\varphi_j, \lambda) \cos \varphi_j d\lambda + \int_{\lambda_{Ny}}^{\lambda_K} f(\varphi_E, \lambda) \cos \varphi_E d\lambda \right] \quad (\text{III.2.a})$$

ahol

$$\varphi_i = \frac{(2i-1)(\varphi_E - \varphi_D)}{2m} \quad (\text{III.2.b}) \quad \varphi_j = \frac{j(\varphi_E - \varphi_D)}{m} \quad (\text{III.2.c})$$

A tagokat akár különböző felosztásokkal is közelíthetjük. Ennek gömbfelületen nagy jelentősége van, hiszen a pólusok közelében ugyanakkora hosszúságmegváltozásra kevesebb gömbi távolság jut.

Vegyünk egy zárt töröttvonalat a gömb felszínén, melyet φ, λ koordinátapárokkal jellemzünk. Az egyszerűség kedvéért a töréspontokat ne ortodromákkal, hanem olyan görbékkel kössük össze, melyek mentén a szélesség és hosszúság megváltozásának aránya állandó. Ezzel egyrészt, ha a töréspontok távolsága nem túl nagy, nem követünk el számottevő hibát (CHAMBERLAIN – DUQUETTE, 2007), másrészt a GIS-alkalmazások a gömbi koordinátákkal jellemzett állományokat általában négyzetes hengervetületben jelenítik meg, ahol épp ezek a görbék képződnek egyenesre. Így a felület digitalizálásakor is ezeket a görbéket követjük.

Több ilyen zárt vonallal bonyolultabb, nem összefüggő, vagy akár lyukas felületet is megadhatunk. Legyenek ezek a körvonalak olyanok, hogy sehol se messék a 180. meridiánt! ^{*} Így már a gömbi koordináták gyakorlatilag ugyanúgy viselkednek, mintha síkon lennének.

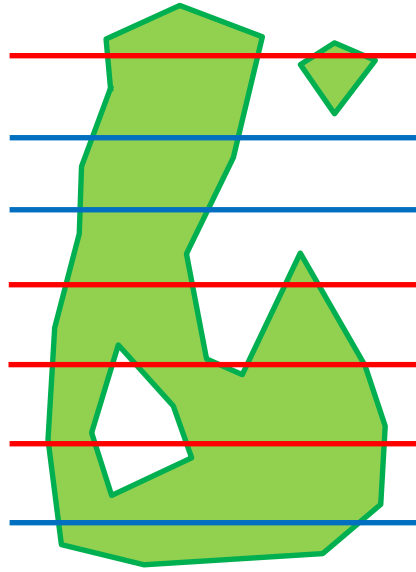
Pontossági igényünknek megfelelően jelöljük ki egy gömbi távolságot, amely a felosztás finomságát jellemzi! Ennek hosszát fokban t -vel jelölöm. A felület legkisebb befoglaló foktrapézát könnyen megkereshetjük. A foktrapéz észak–déli kiterjedését ismerve osszuk fel a területet m darab gömbövre úgy, hogy azok kiterjedése közelítőleg t fok legyen! Ekkor a (III.2.a) képlet segítségével a φ szerinti integrált közelíteni lehet.

^{*} Ez nem jelent megkötést, hiszen bármely felület két részre osztható e mentén.

A megmaradt, λ szerinti integrálok mind valamilyen

$$\int_{\lambda_{Ny}}^{\lambda_K} f(\varphi_j, \lambda) \cos \varphi_j d\lambda \quad (\text{III.3})$$

alakúak. Azonban mivel nem foktrapézon integrálunk, valójában λ_{Ny} és λ_K nem konstansok, hanem φ_j függvényei! Sőt, előfordulhat az is, hogy a vizsgált φ_j szélességi kör több szakaszát is tartalmazza egy konkáv felület (ld. III.1. ábra).



III.1. ábra. A piros szélességi körök többször metszik a felületet

Vizsgáljuk meg, hogy pontosan hol metszi felületünk határvonala a φ_j szélességet! Ez a korábbi egyszerűsítések miatt lineáris interpolációval könnyen számítható. Minden szélességi körön páros számú metszéspontot találunk. Ez akkor is igaz, ha a felületet több körvonallal írtuk le. Ezeket növekvő sorba rendezzük hosszúság szerint. Tudjuk, hogy a 180. meridiánt a felületünk nem tartalmazza, legfeljebb érinti. Így minden páratlan sorszámú metszésponttól az őt követő páros sorszámú metszéspontig kell venni a most már egydimenziós integrált a (III.1) képlet segítségével. A felosztás sűrűségét úgy érdemes meghatározni, hogy az osztásközök közelítőleg $t/\cos \varphi_j$ fok hosszúságkülönbséghez tartozzanak. Így nagyjából ugyanolyan sűrű lesz a felosztás, a pólusoknál, mint az Egyenlítőnél.

Az osztásköznél jóval kisebb vonalszakaszokra eső integrálok elhagyása nem befolyásolja túlzottan a pontosságot, és az egymástól az osztásközhöz képest csak igen kis távolságra található szakaszok is bátran összevonhatóak.

Tapasztalataim szerint tagolatlanabb határvonalak esetén (Pl. Afrika) már akár $t = 20^\circ$ esetén is, tehát igen kevés rácsponttal is csak 1% eltérés van az azonosan 1 függvény numerikus felületi integrálja és az ismert felszín között. Tagoltabb határvonalak is jó pontossággal – 1 ezrelék körüli hibával – közelíthetők $t = 4^\circ$ választása mellett. Geokartográfiai célú alkalmazásokra legfeljebb egy vagy két fokos felosztásig van értelme elmenni, a pontosság – de ezzel együtt a számításigény – a felosztás sűrítésével rohamosan nő.

III.2. Numerikus optimalizálás

Miután a globális torzultság numerikusan számítható, fölmerül, hogy lehetséges-e egy vetület paramétereit úgy meghatározni, hogy annak torzultsága az adott szabálytalan felületen a lehető legkisebb.

III.2.a. Előzmények

A IV.1. fejezetben látni fogjuk, hogy a földrajzi térképeken a legkisebb torzultsú vetületet az Euler – Lagrange-differenciálegyenlet megoldásával kaphatjuk meg. Azonban a differenciálegyenlet analitikus megoldására jellemzően nincs lehetőség, szükség van közelítő módszerek használatára. SNYDER (1985) úttörő kísérleteket folytatott ezen a területen, és a következő direkt módszert használta:

1. Felírta a vizsgált vetületcsalád általános vetületi egyenleteit. Az általános képletekben megmaradt ismeretlen függvényeket valamilyen polinommal közelítette. Így elérte, hogy a vetületi egyenletben az összes ismeretlen paraméter skalár legyen.
2. Egy adott, lehetőleg triviális paraméterkombinációt kezdőértéknek választva felírta a vetület torzultságát
3. A paraméterkombináció megváltoztatásával a lehető legkisebbre csökkentette a torzultságot

Az optimális paraméterkombináció megtalálására Snyder a legkisebb négyzetek módszerét használta, mely kis számításigényű – lineáris egyenletrendszer megoldására vezet –; viszont komoly előkészítést igényel, mert szükséges felírni a torzultság parciális deriváltjait minden egyes paraméter szerint.

Utóbbi miatt csak folytonosan differenciálható torzultsági mérőszám használható.

CANTERS (2002) a számítástechnika fejlődését kihasználva már nagyobb számításigényű módszert, az alább ismertetett *szimplex-eljárást* részesítette előnyben. Az eljáráshoz már nem szükségesek a deriváltak, elegendő a torzultság értékét a paramétereiktől függően numerikusan meghatározni.

III.2.b. A szimplex-módszer és javítása

Egy paraméterterben a legjobb paraméterek megkeresése egy többváltozós függvény minimumhelyének meghatározására vezet, melyre számtalan megoldás létezik (PRESS, 2002). Ezek közül a vetülettanban a szimplex-eljárás kedvezőnek mondható, mert nem igényel deriválást, vetülettani problémák megoldására stabilan és kevés fáradsággal alkalmazható (CANTERS, 2002).

A szimplex-módszer egy heurisztikus minimumkereső eljárás (NELDER – MEAD, 1965). Egy m változós függvény minimumhelyének megkereséséhez először $m + 1$ darab m dimenziós vektort jelölünk ki a paraméterterben kezdeti értéként. Minden vektorhoz kiszámítjuk a függvényértéket is. Ezt követően a legmagasabb értékű vektor helyett alacsonyabb értékű vektort keresünk az alábbi algoritmussal:

1. A vektort tükrözzük a többi vektor centroidjára (számtani közepére). A középpontos tükrözés itt nem szükségszerűen egybevágósági transzformáció, lehet valamilyen L -szeres hasonlóság is, de a vetülettanban $L = 1$ jó választás (CANTERS, 2002).
2. Ha az 1. lépésben kijött függvényérték még a legalacsonyabb pontnál is kisebb volt, megpróbálunk egy M -szeres középpontos hasonlóság segítségével még alacsonyabb függvényértéket elérni. Jellemzően $M = 2$.
3. Ha az 1. lépésben megtalált függvényérték még az eredetinél is magasabb, akkor az eredeti pont és a centroid között keresünk jobb pontot egy N -szeres hasonlóság segítségével. Általában $N = 1/2$.
4. Ha a 3. lépés sem volt sikeres, a szimplex valamennyi vektorát egy O -szoros hasonlósági transzformációval összehúzzuk a legalacsonyabb értékű pontot változatlanul hagyva. A gyakorlatban ez ritkán fordul elő. Jellemzően $O = 1/2$.

Az előző algoritmust addig ismételjük, amíg a szimplex mérete kisebb nem lesz egy előre megadott δ hibahatárnál.

Az eljárás vitathatatlan előnye, hogy egyszerűen implementálható, és nem szükséges semmilyen deriválás elvégzése. A következő hátrányokkal azonban számolni kell:

- a módszer rengeteg függvényhívást igényel, ezért lassú;
- a 4. lépésben nem garantált, hogy a szimplex értékei csökkennek, ezért az eljárás nem feltétlenül a függvény minimumhelyéhez konvergál;
- a módszer gyakran konvergál lokális minimumhelyekhez.

A fenti nehézségek különösen sokdimenziós paraméterterekben jelentkeznek, ezért számos javítása létezik a módszernek. Külön kiemelendő KACZMARCZYK (é. n.) módosítása, mely a 4. lépés végrehajtása előtt más lehetőségeket is megpróbál a konvergenciára legveszélyesebb művelet elkerülése érdekében. Ez elsősorban egy harmadfokú interpolációs polinom minimumhelyének megkeresését jelenti, melyhez csak két új vektor függvényértékét kell megvizsgálni, szemben a 4. lépésben kívánt m db új vektorral.

Az $m + 1$ kezdőértéket érdemes úgy meghatározni, hogy az azok által meghatározott test szabályos legyen, mert a keresés rossz irányba indulása növeli a lokális minimumok megtalálásának veszélyét (TOMICK, 1995). Ezért adott \mathbf{v}_0 kezdőérték és a d oldalhossz alapján a további kezdőértékek javasolt helye:

$$\mathbf{v}_i(j) = \mathbf{v}_0(j) + \frac{d}{\sqrt{2m}} \cdot \begin{cases} \sqrt{m+1} + m - 1 & \text{ha } i = j \\ \sqrt{m+1} - 1 & \text{ha } i \neq j \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

Az eljárás hatékonyságát növelheti, ha az alkalmazott L, M, N, O paramétereknek nem a fenti, megszokott értékeket adjuk. Ez azonban a vetülettani problémákban a tapasztalatok szerint nem segít (CANTERS, 2002).

A lokális minimum megtalálásának veszélyét csökkenti, ha a megtalált minimumhelyet új \mathbf{v}_0 kezdőértéknek választva újraindítjuk az eljárást. Ha az új eljárás által talált minimumhely az előző minimumhelytől egy δ' hibahatárnál közelebb esik, nem valószínű, hogy lokális minimumhelyet találtunk. Ez ugyan jelentősen növeli számításigényt, de a tapasztalatok szerint néhány kivételtől eltekintve még sok ($m \approx 15$) dimenziós paraméterterekben is függetlenné teszi a végeredményt egy esetleg rosszul megválasztott kezdőértéktől.

A tapasztalatok alapján általam hatékonynak talált kezdő méret- és hibahatárok az ismertetett vetülettani problémák megoldásához: $d = 0,01$; $\delta = 10^{-6}$; $\delta' = 10^{-6}$

III.3. Vetüleetoptimalizáló alkalmazás fejlesztése

A fejezetben ismertetett numerikus módszerek segítségével elkészült egy program, amellyel optimális torzulású vetületek állíthatók elő (KERKOVITS – GEDE, 2017).

Az elvi fölépítés a következő:

1. A felhasználó kiválasztja az optimalizálni kívánt vetületet.
2. A program följánl egy általánosan bevált kezdőértéket a paraméterekre, melyet a felhasználó módosíthat.
3. A felhasználó megjelöli, hogy mely paraméterek változhatnak az optimalizálás során, beleértve az esetleges fókhalózat-elforgatás szögértékeit is.
4. A felhasználó megadja az ábrázolni kívánt terület határát, mely lehet foktrapéz vagy szabálytalan felület.*
5. A felhasználó megadja, hogy mely torzultságot kívánja csökkenteni.
6. Az eljárás a fent ismertetett javított szimplex-módszerrel elkezd a kezdőértéknél kisebb globális torzultságú vetületet keresni. Néhány ezer iterációnként a felhasználónak egy térkép vázlat segítségével megmutatja az aktuálisan vizsgált vetületet és kiírja annak torzultságát, így a felhasználó megszakíthatja a futást, ha a szimplex a feladat hibás megadása miatt „eltévedt”, vagy ha az eljárás nem tűnik konvergensnek.
7. Az eljárás befejeztével a kész vetület és annak torzulásai megjeleníthetők, továbbá geoinformatikai állományaink leképezhetők egyenletei segítségével.

A programot JavaScript programozási nyelvben készítettem, mert ez a nyelv az utóbbi időben jelentős fejlődésen ment keresztül. Rengeteg függvénykönyvtárat fel lehet használni a megjelenítéshez,[†] a gépi kód mára már a hagyományos programozási nyelvekkel összemérhető sebességgel dolgozik.

III.4. Melyik kritériumot érdemes választani?

Az I.2.c, az I.2.d. és az I.3.d. fejezetekben sokféle lehetséges definíciót találhatunk a torzultság értelmezésére. Fölmerül a kérdés: Valóban szükségünk van ennyi mérőszámra? Hogyan lehetne a vetületek mindenféle torzultságát egyetlen számmal kifejezni?

* Szabálytalan felületet GeoJSON-formátumban lehet megadni.

[†] A program az OPENLAYERS (2018) könyvtárat használja a térképek generálásához, míg a torzulási izovonalakhoz a MarchingSquaresJS (LORENZ, 2015) könyvtár volt segítségemre.

III.4.a. Módszertan

A vizsgálathoz kiválasztottam 50, legkülönbözőbb tulajdonságokkal rendelkező vetületet, és kiszámítottam rájuk valamennyi ismertetett torzultságot. Ahol ennek volt értelme, a vizsgált területet a $\pm 85^\circ$ -os szélességi körök határolták, de két síkvetület esetében csak a déli szélesség 40° és az északi pólus között számoltam. Az integrálokat a (III.2.a)-ben ismertetett Simpson-szabállyal közelítettem.

A véges torzultság számításánál nem kerülhető el a Monte Carlo integrálás. Ezért a vizsgált területen belül nagy mennyiségben véletlenszerűen kiválasztott alakzatra számítottam a torzultságot.

CANTERS (2002) megállapította, hogy nem érdemes tetszőlegesen nagy méretű véges idomokkal mérni a véges torzultságot. Ennek oka, hogy egymástól nagy távolságra lévő pontokat magába foglaló idomok esetén a vetület megnagyobbodó és összezsugorodó területein egyaránt áthaladva a torzulások kiejtik egymást. Canters azt javasolta, hogy a legnagyobb idom mérete ne haladja meg a 30° -os gömbi távolságot.

Tapasztalataim szerint ez különösen az alaktorzultság mérésénél nem vezet helyes eredményre: az így definiált mérőszám ugyanis rendre jobbnak értékeli a valódi vetületeket a képzetes vetületeknél. A legjobb vetületeknek pedig a körkontúrba képzőek bizonyultak. Ha a mérethatárt 90° -ra növelem,^{*} akkor néhány közismerten rossz tulajdonságú képzetes vetület – mint például a Mercator – Sanson – kivételével a képzetes vetületek teljesítenek jobban, és a körkontúrba képző vetületek is igen rossznak bizonyulnak. Ez felel meg inkább a térképhasználó által érzékelt torzulásoknak, hiszen a földrészek ebbe a mérettartományba esnek. A tapasztaltakból az is megállapítható, hogy regionális térképezéshez, ahol nincsenek ekkora távolságok, érdemesebb lehet valódi vetületet választani, mint képzetést.

A B. függelékben található táblázatokban láthatók az így kiszámolt torzultságok. A torzultságokat grafikonokon ábrázoltam, és az alábbiakban elemeztem.

III.4.b. A hossztorzultság mint a szög- és területtorzultság következménye

Amikor az Airy – Kavrajszkij teljes torzultsági kritériumot az (I.18)-ban és az (I.19)-ben definiáltuk, a torzultságnak két komponensét tudtuk figyelembe

^{*} A szakasz hossza vagy a gömbháromszög egyik oldala sem lehet ettől hosszabb.

venni. Ez a terület- és szögtorzultság. A hossztorzultságot nem szokás a teljes torzultságba beleszámítani.

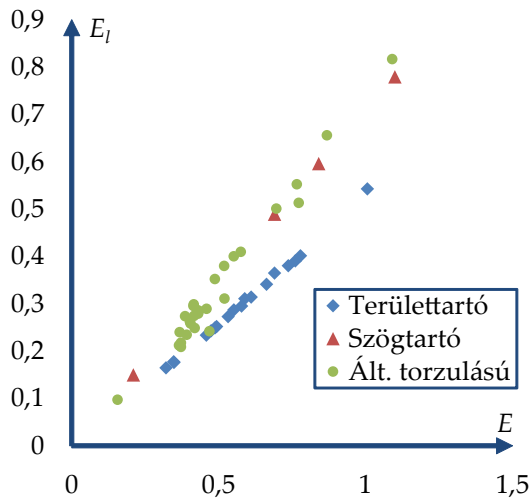
Hogy eldöntsem, valóban helyes-e a hossztorzultságot figyelmen kívül hagyni, ábrázoltam a függőleges tengelyen a hossztorzultságot, vízszintes tengelyen a teljes torzultságot. A III.2.a. ábra elég erős korrelációról* tanúskodik. Azonban feltűnő, hogy a pontok két egyenes körül csoportosulnak. Ha alaposabban megvizsgáljuk, kiderül, hogy a kevésbé meredek egyenes mentén kizárólag területtartó vetületek találhatók. A meredekebb egyenes mentén szögtartó és általános torzulású vetületek egyaránt vannak.

A területtartó vetületek korrelációja erősebbnek látszik a regressziós egyenes körül. Mivel a területtartó vetületek méretaránya kötött, feltételezhető hogy a méretarány egységesítésével tisztább képet kapunk. Az I.2.c. fejezetben relatív globális torzultság néven definiált kritériumokat figyelembe véve azonban a III.2.b. ábrán még élesebben kirajzolódik két regressziós egyenes. Ráadásul két általános torzulású vetület (Aitoff és James vetületei) a területtartó vetületek egyenesére estek. Mindkét vetületet nagy szögtorzultság jellemzi, miközben a területtorzultság szórása csekély. Feltételezhető tehát, hogy létezik olyan U, V súlypár, amellyel bármely vetületre $UE_t^2 + VE_\tau^2 \approx E_t^2$.

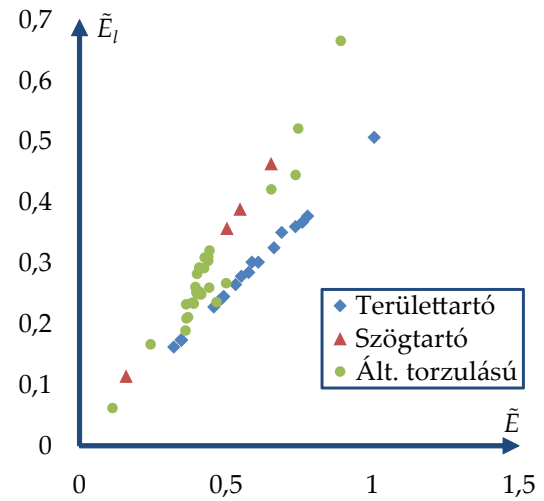
Az adatsorból a legkisebb négyzetek módszerével a következő együtthatók adódtak: $E_t^2 \approx 0,1514E_\tau^2 + 0,2744E_\tau^2$. A becslés hibája elhanyagolható (III.2.c. ábra), a korreláció 0,9879-nek adódott. Az eredményt ellenőriztem determinisztikus módon generált a, b maximális és minimális hossztorzulásokkal. Hasonló eredmény született: $\varepsilon_t^2 \approx 0,1816\varepsilon_\tau^2 + 0,2462\varepsilon_\tau^2$, vagyis a Jordan – Kavrajzkij-kritérium mintegy másfél-kétszer olyan érzékeny a területtorzulásra, mint a szögtorzulásra.

A hossztorzultság az optimalizálás során tehát valóban elhagyható, mivel nem csak nehézkesen számítható, de – megfelelő súlyozással – a sokkal egyszerűbb teljes torzultsággal nagy pontossággal közelíthető.

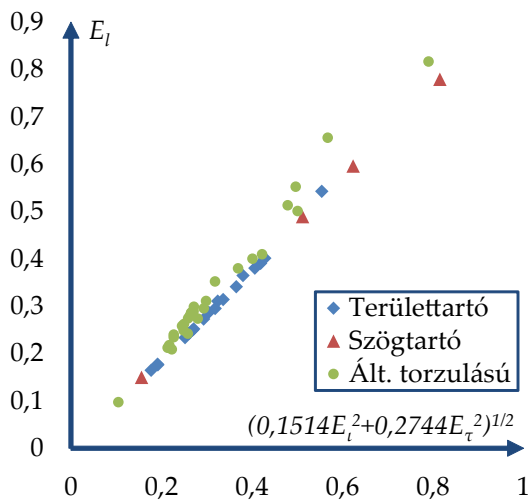
* Korreláció alatt a lineáris szochasztikus kapcsolat erősségét értem. Az X_i és Y_i adatsorok – melyek átlaga \bar{X} ill. \bar{Y} – korrelációja $\sum_i (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) / \sqrt{\sum_i (X_i - \bar{X})^2 \sum_i (Y_i - \bar{Y})^2}$.



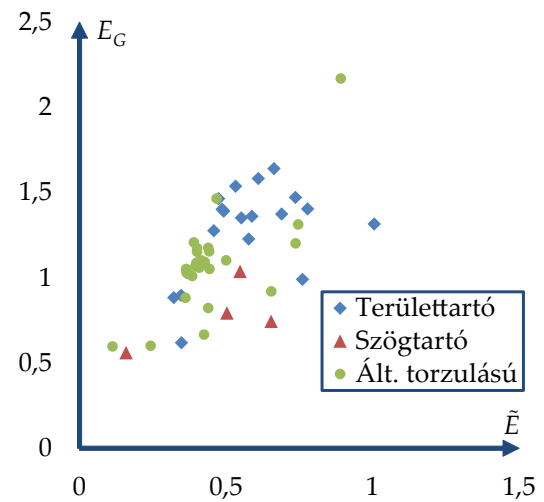
a) Jordan – Kavrajzkij és Airy – Kavrajzkij



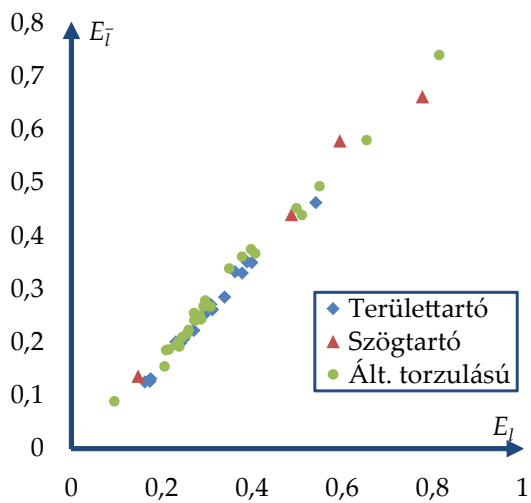
b) Relatív hossz- és teljes torzultság



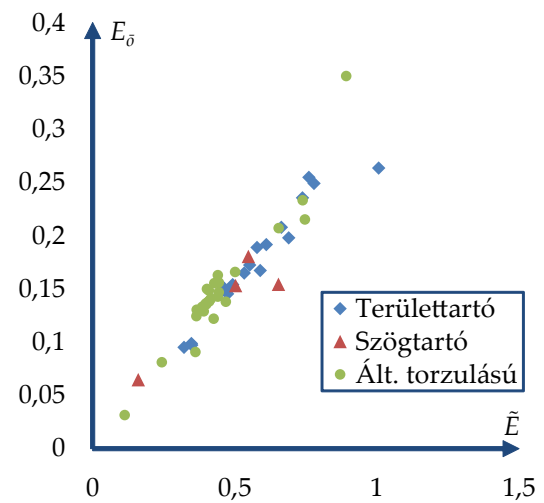
c) A Jordan – Kavrajzkij közelítése



d) Teljes másodrendű és relatív teljes torzultság



e) Véges hossz- és hossztorzultság



f) Véges alak- és relatív teljes torzultság

III.2. ábra. Összefüggések a különböző torzultságok között

III.4.c. A véges torzultság hátrányai

A hagyományos torzultsági mérőszámok infinitezimális skálán dolgoznak. Több kutató szerint, minthogy a térképolvasó nem ezekkel, hanem a véges torzultsággal (I.2.d. fejezet) találkozik, véges alakzatokat vizsgáló módszereket is alkalmazni kell. Úgy vélik, ezek a mérőszámok erősen tartalmazzák a leképezés nem affin tulajdonságait is.

Az első publikáció a témában FISHER és MILLER (1944) műve, akik 20 gömbháromszöget választottak, síkba képezték, majd a gömbháromszögek képeinek görbe oldalai helyett egyenes szakaszokat vettek. Az így keletkezett síkháromszögek oldalait, szögeit és területeit hasonlították össze gömbi megfelelőikkel. TOBLER (1964) általánosította módszert a vizsgált területen belül nagy mennyiségű véletlenszerű alakzat generálásával. Ezt követően számtalan tanulmányban (PETERS, 1975; LASKOWSKI, 1997; CANTERS, 2002; GOTT – MUGNOLO – COLLEY, 2007) próbálták finomítani a módszert, és változatos függvényekkel számoltak a torzulási arányból véges torzultságot.

Mindegyik kutatás visszatérő megállapítása, hogy nagy különbség van a véges és a hagyományosan definiált torzultságok között. Ez összhangban van azzal a megfigyeléssel, hogy míg bármely szögtartó vetület a hagyományos torzulási elmélet szerint lokálisan alaktartó, a kontinensek alakjait gyakran erősen torzítva adják vissza.* Így tehát nem meglepő számukra, hogy ezzel a módszerrel egészen más eredményt kaptak.

A valóság ezzel szemben az, hogy a véges méretek torzultsági kritériumai közül a globális véges hossztorzultság (E_l) gyakorlatilag megfeleltethető a globális hossztorzultságnak (E_l) – a számított korreláció: 0,9944 –, így az előzetes feltevéssel ellentétben a véges távolságok megváltozása jól közelíthető kizárólag a torzulási modulusokból (III.2.e. ábra). A megfelelő relatív torzultságok között hasonlóan szoros összefüggés tapasztalható.

A III.2.f. ábrán az figyelhető meg, hogy a globális véges alaktorzultságnak szintén erős lineáris regressziója van a méretaránytól függetlenített relatív globális teljes torzultsággal. A két kilógó érték az igen rossz torzulású Lambert-síkvetület és a perspektív hengervetület. A korreláció valamivel gyengébb, 0,9346. Ez összhangban van

* Az I.3. fejezetben láttuk, hogy a szögtartó vetületek valójában csak meghatározott vonalak mentén tekinthetők minden szempontból lokálisan alaktartónak.

azzal a tapasztalattal, hogy a kontinensek alakjai jellemzően kedvezőbbek azokban a vetületekben, amelyekben az Airy – Kavrajszkij-kritérium értéke alacsonyabb.

Megállapítjuk tehát, hogy a véges méretű térképi idomok torzulása meglepően jól közelíthető a teljes torzultsággal. A számítások tapasztalata szerint amikor a térképet távolságok szemléltetésére akarjuk optimalizálni, a területtorzultságnak majdnem kétszer akkora súlyt kell adni, mint a szögtorzultságnak. Ha pedig a kontinensek alakjának megőrzése a cél, a két súlyt közel egyenlőnek érdemes választani.

A hivatkozott szakirodalom feltehetően azért kapott eltérő torzultsági értékeket a véges torzultságokra, mert nem a Kavrajszkij-típusú mérőszámokat alkalmazták. Az 1-től vett eltérést az exponenciális skála miatt csak logaritmussal lett volna szabad számolni,^{*} a többi módszer különösen nagy torzulások jelenléte esetén félrevezető értékeket adhat (FRANČULA, 1971).

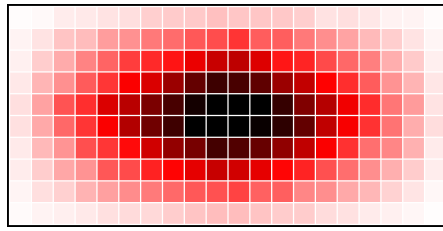
Meg kell állapítani ugyanakkor, hogy míg a véges torzultság alkalmazásával nem sikerült jelentős hozzáadott információt megtudni a vizsgált vetületekről, alkalmazásuknak két hátránya van: Egyrészt a számításhoz elkerülhetetlen véletlen alakzatok bevonása, így a véges torzultság értéke nem determinisztikus. Másrészt kevésbé nyilvánvaló az a tapasztalat, hogy a véges torzultság kisebb mértékben veszi figyelembe a vizsgált terület határán jelentkező torzulásokat.

Utóbbit két egyszerű kísérlettel szemléltetem. Először vegyünk egy téglalapot, melynek területén véletlenszerűen kiválasztunk pontpárokat. Valamennyi pontpárnak megkeressük a szakaszfelezőjét. A szakaszfelezők a téglalapon nem egyenletes eloszlásban jelentkeznek, hanem a téglalap közepén sűrűbben, sarkainál ritkábban. Ha a véletlen szakaszt csak egy rögzített távolságnál kisebb hossz esetén fogadom el, a megengedett távolság csökkenésével a téglalap egyre nagyobb területén lesz a felezőpontok eloszlása egyenletes (III.3. ábra).

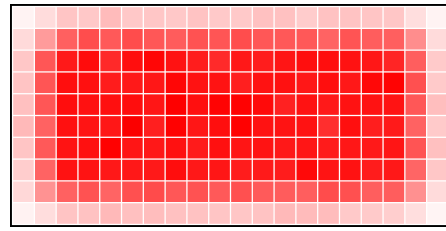
A második kísérletben a (IV.26) és (IV.50) képletekben leírt általános képzetes síkvetületet optimalizáltam ferde transzverzális elhelyezésben a fejezetben leírt módszerekkel az Atlanti-óceánra.[†] A minimalizált függvény először a Jordan – Kavrajszkij-kritérium majd a globális véges hossztorzultság volt. Utóbbinál a szakaszok legnagyobb megengedett hosszát az egymást követő futtatásoknál

^{*} A legtöbb gyakorlatban alkalmazott torzultsági mérőszám felfogható a logaritmusfüggvény 1 körüli közelítésének, így kis torzulások esetén használatuk az egyszerűségük miatt indokolt lehet.

[†] Az óceán határait az IHO adatbázisa alapján, melléktengerekkel együtt értelmeztem.



a) Tetszőleges hosszúságú szakaszok esetén



b) Felülről korlátos hosszúságú szakaszok esetén

III.3. ábra. Véletlen szakaszfelezők eloszlása egy téglalapban

30°, 60° és 90° értékekben határoztam meg. Az eredményül kapott paraméterek a III.1. táblázatban olvashatók.*

III.1. táblázat. Legjobb ferde transzverzális képzetes síkvetület együtthatói az Atlanti-óceánra

Ábra	r_1	r_3	r_5	g_{12}	g_{14}	g_{16}	g_{22}	g_{24}	g_{32}	λ_0	λ_k
III.4.a	0,9940	0,0015	-0,0026	-0,1891	0,0450	-0,0112	0,1023	-0,0069	-0,0198	-25,53°	23,24°
III.4.b	0,9973	0,0036	-0,0049	-0,1994	0,0476	-0,0099	0,1211	-0,0107	-0,0274	-26,32°	24,24°
III.4.c	0,9905	0,0065	-0,0059	-0,1245	0,0358	-0,0076	0,0073	-0,0054	0,0179	-27,85°	22,19°
III.4.d	0,9871	-0,0030	-0,0016	-0,0717	0,0246	-0,0037	-0,0408	-0,0082	0,0365	-31,15°	19,79°
III.5	1	0,0287	-0,0024	-0,1817	0,0310	-0,0076	0,0727	0,0015	-0,0144	-28,51°	24,31°

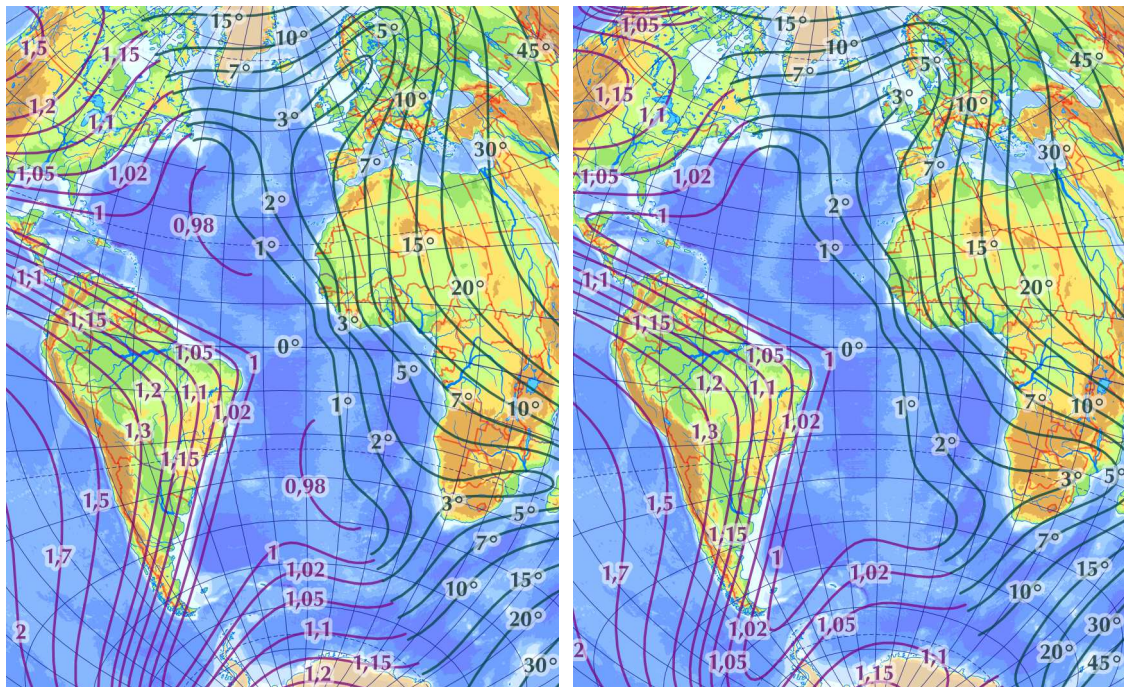
Az optimalizált vetület torzulási izovonalai a mérethatár növelésével egyre kevésbé követik pontosan az óceán partvonalát (III.4. ábra). Megfigyelhető, hogy a vetület torzulásai az óceán közepén egyre kedvezőbbek, ahogy hosszabb szakaszokat is megengedünk, de az öblökben és melléktengerekben az ellenkező mondható el. Feltűnő, hogy a szakaszok hosszának emelkedésével a konkáv részeken (pl. Brazília) a kedvező torzulások a szárazföldön is megjelennek. Így tehát a véges torzultság a másik kísérlettel összhangban a szakaszfelezők környékén veszi figyelembe a torzulást, melyek a szakaszok méretétől függően nem egyenletesen oszlanak el a területen.

Hasonló jelenséget tapasztalt LASKOWSKI (1997), aki a teljes földfelszínre optimalizált, de az ellenmeridiánt keresztező szakaszokat nem vette figyelembe. A jelenséget ő *élhatás*nak nevezte, de mélyebben nem foglalkozott vele.

III.4.d. A másodrendű torzultság használata

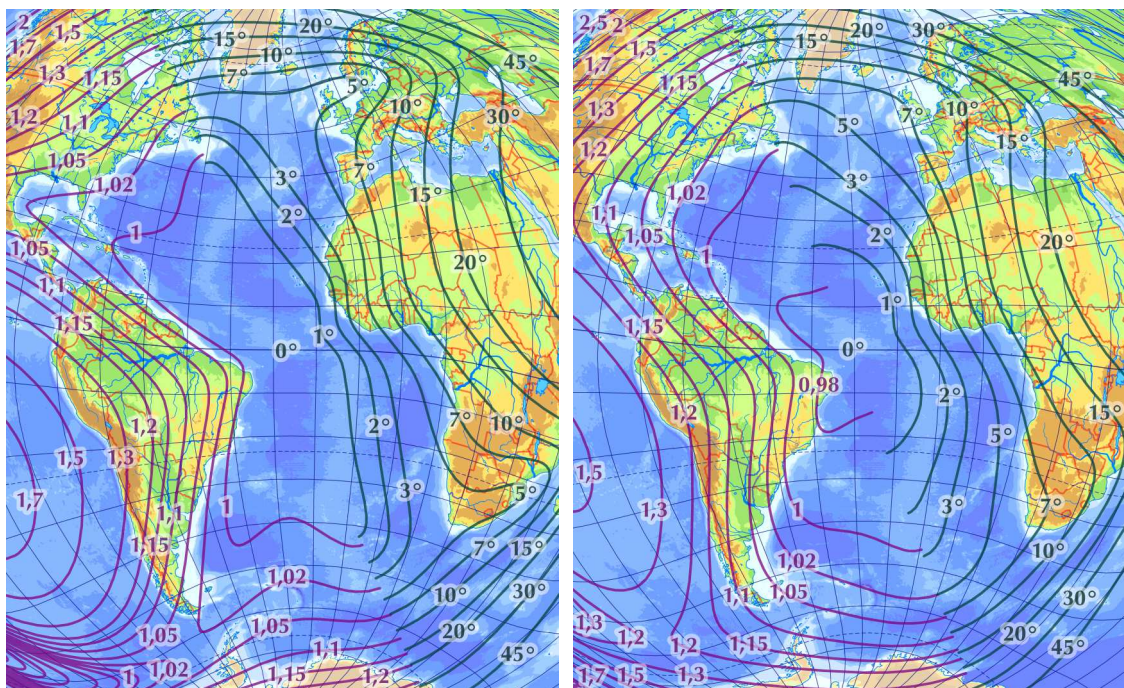
A görbültség, a ferdültség és az ő átlaguk csak gyenge korrelációt mutatnak a többi vizsgált torzultsági mérőszámmal. Például a globális teljes másodrendű

* Megjegyzendő, hogy különösen a fókálózat-elforgatás paraméterei közelítő értéknek tekintendők a véges torzultság esetén, mert a számítás nem determinisztikus volta miatt az egyes futtatások eredményei akár $\pm 1^\circ$ eltérést is mutathatnak.



a) Jordan – Kavrajszkij-kritérium

b) Véges torzultság, max. 30°



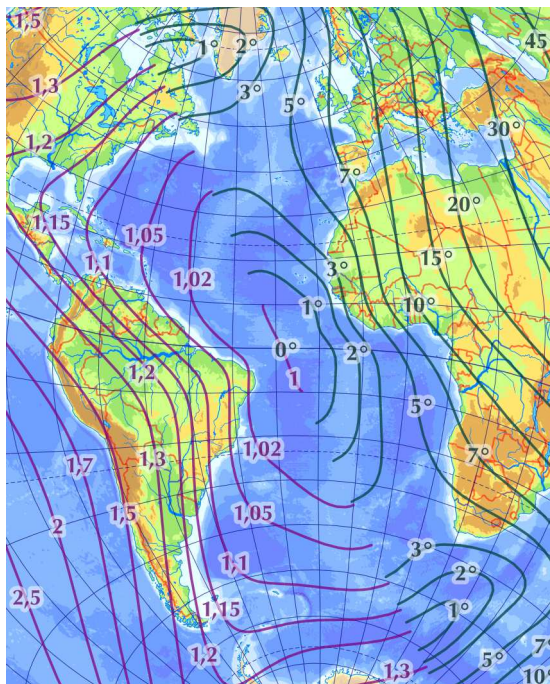
c) Véges torzultság, max. 60°

d) Véges torzultság, max. 90°

III.4. ábra. Legjobb képzetes síkvetületek az Atlanti-óceánra különböző kritériumok szerint. Lila: a τ értékek izovonalai, zöld: az ω értékek izovonalai

torzultság és a relatív globális teljes torzultság között a korreláció csupán 0,6301. A III.2.d. ábrán semmilyen triviális kapcsolat nem látszik.

A fent bemutatott képzetes síkvetületet a másodrendű torzultságra is optimalizáltam. Mivel ez a mérőszám nem érzékeny a vetület skálázására, egy kezdeti feltételre is szükség volt: a vetület segédpólusában $l = 1$ értéket – hossztartást – kötöttem ki. A torzulási izovonalak a kapott vetületben (III.5. ábra) valamennyi itt tárgyalt vetület közül a legkevésbé futnak párhuzamosan a terület határával.



III.5. ábra. Legjobb képzetes síkvetület az Atlanti-óceánra a másodrendű torzultság szerint

Az eredmények azt sejtetik, hogy a görbültségnek és a ferdültségnek nincs szoros kapcsolata a Kavrajzkij-típusú mérőszámokkal. Bár valószínűleg vannak közös faktorok mögöttük – amint azt a kisebb korreláció is mutatja – és az optimalizálás eredménye hasonló vetület, ezek a mérőszámok lényegileg különbözőnek mondhatók, van értelme őket külön figyelembe venni. Ezek a mérőszámok fejezik ki tehát a vizsgáltak közül a leghatékonyabban a vetület affin transzformációtól vett eltérését. Mivel a görbültségnek és a ferdültségnek mértékegysége van, az eltérő skálázás miatt nem számítható hagyományos és másodrendű torzultságok súlyozott matematikai átlaga. Ha mindenáron egy számmal akarjuk kifejezni a kétfajta torzultságot, a súlyozott mértani közép elméletileg számítható, de ezzel a módszerrel nem sikerült használható eredményeket elérnem.

Negyedik fejezet

Legjobb vetületek

Az I.4. fejezet végére sikerült matematikailag egyértelműen definiálni, hogy mit tekintünk legjobb kartográfiai vetületnek. A II. fejezetben láttuk, hogy van értelme a torzulásokat csökkenteni és így a legjobb vetületet megkeresni, mert míg a kisebb torzulások több célcsoportban is segítették a térképolvasást, az esetlegesen bonyolultabb jellegű fokhálózat nem rontott rajta. Az előző fejezetben az olvasó megismerte, hogy milyen numerikus módszerek állnak rendelkezésre, ha kívánatos a torzultság csökkentése. Hátra van még a legjobb vetületek meghatározása az egyes vetületcsaládokban.

Jelen fejezetben látható, hogy a valódi hengervetületek körében nem szükséges numerikus minimumkeresés a legjobb vetület meghatározásához, mert az analitikus módon előállítható. A többi vetületcsalád esetén általános vetületi egyenletek fölírását követően az ismeretlen függvényeket polinommal vagy más, tetszőleges függvényt közelíteni képes sorral kell helyettesíteni. A sorok együtthatóit a III.2.b. fejezetben leírt módszerrel lehet egy adott területre meghatározni.

IV.1. Valódi hengervetületek

Valódi hengervetületnek nevezzük azt a vetületet, ahol a parallelkörök párhuzamos egyenesekre képződnek le; a meridiánok képei pedig a parallelkörök képeire merőleges, párhuzamos egyenesek, melyek a hosszúságkülönbséggel arányosan helyezkednek el. Általában elvárjuk, hogy a parallelkörök az Egyenlítőre szimmetrikusan helyezkedjenek el. Ezt képlettel kifejezve:

$$x = \cos \varphi_n \lambda \quad (\text{IV.1.a}) \qquad y = y(\varphi) \quad (\text{IV.1.b})$$

ahol $y(\varphi)$ tetszőleges szigorúan monoton növekvő, kétszer differenciálható, páratlan függvény, és φ_n a hossztartó szélesség.

A fokhálózat menti torzulások:

$$h = \frac{\cos \varphi_n}{\cos \varphi} \quad (\text{IV.2.a})$$

$$k = \frac{dy}{d\varphi} \quad (\text{IV.2.b})$$

A valódi hengervetületek között egyaránt találunk szögtartó és területtartó leképezéseket. Mind a szögtartó, mind a területtartó hengervetületnek választhatunk egy torzulásmentes paralelkört. Ennek optimális értéke függ az ábrázolni kívánt területtől, de a meridiánban hossztartó, a szögtartó és a területtartó változatokban GRAFAREND és NIERMANN (1984) megállapítása alapján ugyanazon területre megegyezik.

A Kavraszskij-féle mutatószámok szerinti legjobb valódi hengervetület egyenlete bármely a (segéd)egyenlítőre szimmetrikus gömbvön analitikusan kifejezhető (KERKOVITS, 2017a).

BAJEVA (1987) javaslata alapján a torzultsági kritériumot a szög- és területtorzultságok súlyozott átlagaként írjuk föl, ahol a területtorzultság súlya $0 \leq p \leq 1$, és a szögtorzultságé $1 - p$. A globális torzultság tehát a φ_H és $-\varphi_H$ szélességek által határolt gömbvön az (I.18)-ból – figyelembe véve, hogy merőleges fokhálózatu vetületekben a, b és h, k egymással megegyeznek:

$$E^2 = \frac{1}{4\pi \sin \varphi_H} \int_{-\varphi_H}^{\varphi_H} \left[p \ln^2 \frac{\cos \varphi_n \frac{dy}{d\varphi}}{\cos \varphi} + (1-p) \ln^2 \frac{\cos \varphi \frac{dy}{d\varphi}}{\cos \varphi_n} \right] \cos \varphi d\varphi \quad (\text{IV.3})$$

E^2 minimalizálását variációszámítással lehet megoldani. Az integrandust egy $f(y', \varphi)$ függvénnyel jelölöm, ahol $y' = dy/d\varphi$. Ekkor fölírható az Euler – Lagrange-differenciálegyenlet (KÓSA, 1970), mely szerint E^2 csak akkor lehet minimális, ha

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad (\text{IV.4})$$

Mivel f nem függ y -től, csak annak deriváltjától, így az első tag nulla. Ebből következik, hogy a második tag is nulla. Az a differenciálhányados azonban csak akkor lehet nulla, ha

$$\frac{\partial f}{\partial y'} \equiv \text{const.} \quad (\text{IV.5})$$

Egy másik szükséges feltétel a transzverzalizás, melynek jelen esetben egy egyszerűbb alakját is föl lehet írni. E szerint E^2 csak olyan f integrandus esetén lehet minimális, melyre

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y'} \right|_{\varphi=\pm\varphi_H} = 0 \quad (\text{IV.6})$$

A két feltétel együtt csak akkor teljesülhet, ha

$$\frac{\partial f}{\partial y'} \equiv 0 \quad (\text{IV.7})$$

A deriválást elvégezve:

$$\frac{2 \cos \varphi}{\frac{dy}{d\varphi}} \left[p \ln \frac{\cos \varphi_n \frac{dy}{d\varphi}}{\cos \varphi} + (1-p) \ln \frac{\cos \varphi \frac{dy}{d\varphi}}{\cos \varphi_n} \right] = 0 \quad (\text{IV.8})$$

Azonnal szembetűnik, hogy csak a zárójeles tényező lehet azonosan nulla. Így átrendezve és a logaritmus azonosságait fölhasználva:

$$(2p-1) \ln \cos \varphi_n + \ln \frac{dy}{d\varphi} + (1-2p) \ln \cos \varphi = 0 \quad (\text{IV.9})$$

Ebből $dy/d\varphi$ kifejezhető:

$$\frac{dy}{d\varphi} = e^{(2p-1)(\ln \cos \varphi - \ln \cos \varphi_n)} = \left(\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_n} \right)^{2p-1} \quad (\text{IV.10})$$

Máris világosan látszik a vetület néhány tulajdonsága: φ_n nemcsak hossztartó, de torzulásmentes paralelkör is (IV.1. ábra), hiszen a meridián menti hossztorzulás, azaz y deriváltja itt 1. A kifejezést deriválva és $d^2y/d\varphi^2$ előjelét vizsgálva megállapítható, hogy ha $(2p-1)$ negatív, akkor a paralelkörök az Egyenlítőtől távolodva ritkulnak. Ebben az esetben a pólusban a meridián menti hossztorzulás végtelen. Ha $(2p-1)$ pozitív, akkor viszont a paralelkörök a pólusok irányába sűrűsödnek.

A (IV.10) differenciálegyenlet megoldása (felhasználva, hogy $y(0) = 0$):

$$y = \cos^{1-2p} \varphi_n \int_0^\varphi \cos^{2p-1} \varphi \, d\varphi \quad (\text{IV.11})$$

Sajnos az integrál csak speciális p -k esetén fejezhető ki analitikusan. Könnyen belátható, hogy $p=0$ esetén Mercator vetületét kapjuk, de nem az Egyenlítő, hanem valamely más paralelkör lesz hossztartó. $p=1$ esetben az eredmény egy területtartó valódi hengervetület. $p=1/2$ választása esetén a meridiánban hossztartó vetületet kapjuk meg (GYÖRFFY, 1990). Más p -kre numerikus integrálással tudjuk a legjobb vetületet közelíteni.

Ismeretlen még a φ_n normálparalelkör. Ennek kifejezéséhez átalakítom $dy/d\varphi$ képletét:

$$\ln \frac{dy}{d\varphi} = (2p-1) \ln \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_n} \quad (\text{IV.12})$$

Visszahelyettesíték a (IV.3) egyenletbe.

$$E^2 = \frac{1}{4\pi \sin \varphi_H} \int_{-\varphi_H}^{\varphi_H} \left(p \left[\ln \frac{\cos \varphi_n}{\cos \varphi} + (2p-1) \ln \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_n} \right]^2 + \right. \\ \left. + (1-p) \left[\ln \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_n} + (2p-1) \ln \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_n} \right]^2 \right) \cos \varphi d\varphi \quad (\text{IV.13})$$

Elvégezve a négyzetre emeléseket:

$$E^2 = \frac{1}{4\pi \sin \varphi_H} \int_{-\varphi_H}^{\varphi_H} \left[4p(1-p)^2 \ln^2 \frac{\cos \varphi_n}{\cos \varphi} + 4p^2(1-p) \ln^2 \frac{\cos \varphi_n}{\cos \varphi} \right] \cos \varphi d\varphi \quad (\text{IV.14})$$

Szorzáttá alakítva:

$$E^2 = \frac{4p(1-p)}{4\pi \sin \varphi_H} \int_{-\varphi_H}^{\varphi_H} \cos \varphi \ln^2 \frac{\cos \varphi_n}{\cos \varphi} d\varphi \quad (\text{IV.15})$$

Ez csak ott lehet minimális, ahol

$$\frac{\partial E^2}{\partial \varphi_n} = 0 \quad (\text{IV.16})$$

Az integráljel alá deriválva, és felhasználva, hogy az integrandus φ páros függvénye:

$$-4 \operatorname{tg} \varphi_n \int_0^{\varphi_H} \cos \varphi \ln \frac{\cos \varphi_n}{\cos \varphi} d\varphi = 0 \quad (\text{IV.17})$$

Az egyenletnek $\varphi_n = 0$ is gyöke, de ez épp E^2 maximumhelyét adja. Nekünk a minimumhely kell. Ezért oszthatok le $-4 \operatorname{tg} \varphi_n$ -nel:

$$\ln \cos \varphi_n \int_0^{\varphi_H} \cos \varphi d\varphi - \int_0^{\varphi_H} \cos \varphi \ln \cos \varphi d\varphi = 0 \quad (\text{IV.18})$$

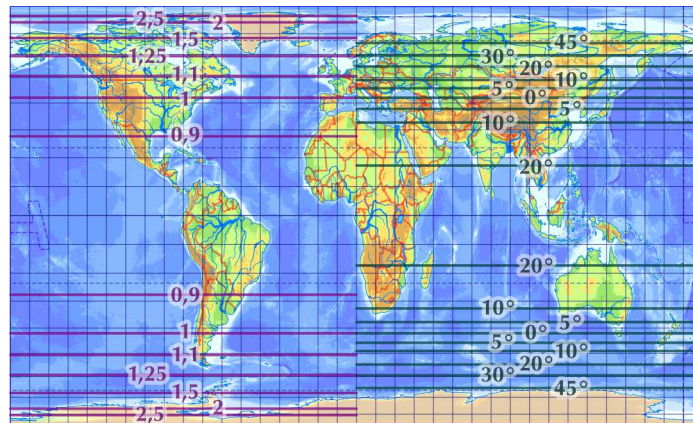
Az első integrál egy sima szinuszfüggvény, a második primitív függvényt parciális integrálással fejezhetjük ki:

$$\ln \cos \varphi_n \sin \varphi_H - \sin \varphi_H \ln \cos \varphi_H + \sin \varphi_H - \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_H}{2} \right) = 0 \quad (\text{IV.19})$$

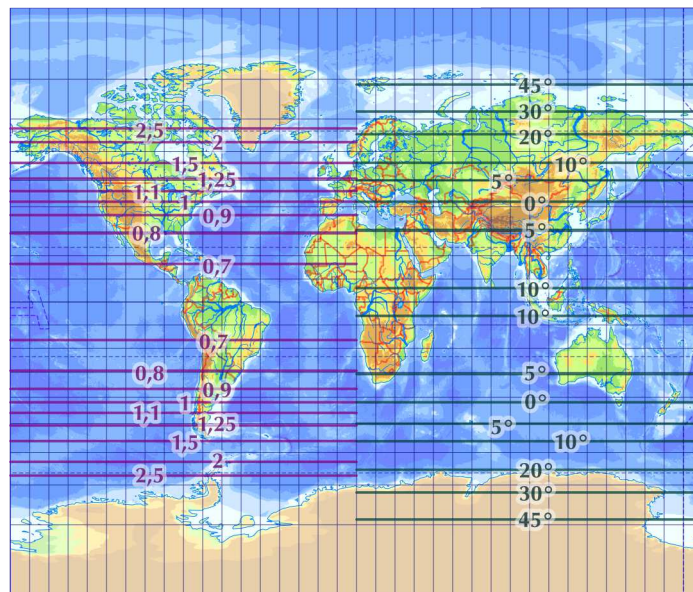
Azaz φ_n optimális értéke kizárólag φ_H függvénye, p -től független:

$$\ln \cos \varphi_n = \ln \cos \varphi_H - 1 + \frac{\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_H}{2} \right)}{\sin \varphi_H} \quad (\text{IV.20})$$

Ha $\varphi_H = \pi/2$, akkor a fenti kifejezés határértéke: $\cos \varphi_n = 2/e$



a) $p = 0,7; \varphi_H = 85^\circ$



b) $p = 0,3; \varphi_H = 85^\circ$

IV.1. ábra. *A legjobb valódi hengervetület képe*

Az utóbbi időben egyre ritkábban a használnak valódi hengervetületeket nyomtatott térképeken a teljes Föld ábrázolására. Leginkább időzónatérképen célszerű alkalmazni ilyen vetületet, mert ebben ábrázolva az időzónák közel függőleges sávokra képződnek le. További előnye a vetületcsaládnak, hogy téglalap kontúrbá képi le a földfelszínt, így a jellemzően téglalap alakú térképtükröt teljesen ki lehet vele tölteni. Manapság a nyomtatott világtérképeket inkább kedvezőbb torzulásokkal rendelkező képzetes vetületekben szokás megjeleníteni.

A webkartográfiában azonban a vetületcsalád reneszánszát éli. Mivel az ellenmeridián egyenesre képződik le, a raszteres térkép egyszerű ismétlésével a térkép tovább folytatható. Így az ábrázolás folytonossága nem szakad meg. Ezt a tulajdonságot számos raszteres térképet szolgáltató térképszerver kihasználja, és az

adatokat valamely valódi – jellemzően Mercator vagy négyzetes – hengervetületben szolgáltatja.

Szintén érdemes valódi hengervetületeket alkalmazni az Egyenlítőre szimmetrikus területek regionális térképezéséhez, különösen akkor, ha az ábrázolni kívánt terület észak–déli kiterjedése jóval kisebb, mint a kelet–nyugati.* Transzverzális vagy ferdetengelyű elhelyezésben a vetületcsalád bármely gömbi főkör mentén elhelyezkedő területre jó választás lehet.

A IV.1. ábrán látható az eredményül kapott vetület. További paraméterekre a leképezés eredménye a (KERKOVITS, 2017a) cikkben megtekinthető. A fejezetben szereplő ábrákon zölddel jelölöm az ω legnagyobb szögmegváltozás, lilával a τ területtorzulás izovonalait. Az elvárt szimmetria miatt az olvashatóság érdekében a torzulásokat csak a szimmetriatengely egyik oldalán rajzoltam meg, azok futása a másik oldalon kikövetkeztethető.

IV.2. Valódi sík- és kúpvetületek

Valódi síkvetületnek nevezzük azokat a vetületeket, amelyekben a szélességi körök koncentrikus teljes körökre, a hosszúsági körök pedig egyenes vonalakra képződnek le, melyek a pólusban a földivel megegyező szöget zárnak be. A valódi kúpvetület ettől abban különbözik, hogy a meridiánok képeinek hajlásszöge nem egyezik meg az alapfelületivel, csak egyenes arányosságban van vele, és ennek megfelelően a szélességi körök képei is körívek lesznek.

Az általános vetületi egyenletek:

$$x = \varrho(\beta) \sin(n\lambda) \quad (\text{IV.21.a}) \quad y = c - \varrho(\beta) \cos(n\lambda) \quad (\text{IV.21.b})$$

ahol $\varrho(\beta)$ – a továbbiakban sugárfüggvény – tetszőleges szigorúan monoton növekvő függvény.

Ha $n = 1$, akkor a vetület síkvetület, míg kúpvetületeknél $0 < n < 1$ (sugarhajlás). c általában 0, de praktikus megfontolásokból más értéket adhatunk neki.† Ha például

$$c = \varrho(\arcsin n) \quad (\text{IV.22})$$

* Példa a Csendes-óceáni szigetvilág.

† Ez csak egy eltolást jelent, így a vetület megjelenését és torzulásait nem befolyásolja.

akkor egyrészt az origó a kedvező torzulású területekre esik, másrészt a valódi henger- és síkvetületek felé való határátmenet jobban szemléltethető.

Valódi síkvetületet kör alakú területre érdemes használni, hiszen torzulási izovonalai is kör alakúak. Valódi kúpvetületek a gömbi kiskörök mentén fekvő területeken kedvezőek. A fokhálózati menti torzulások konkrét értékei:

$$h = \frac{\varrho n}{\sin \beta} \quad (\text{IV.23.a}) \quad k = \frac{d\varrho}{d\beta} \quad (\text{IV.23.b})$$

A legjobb valódi sík- és kúpvetületek vetületi egyenletei csak az Airy – James – Clarke-kritérium alkalmazása esetén ismertek. Ennek oka, hogy az Euler – Lagrange-differenciálegyenlet általában túl bonyolult, megoldása nem ismert.

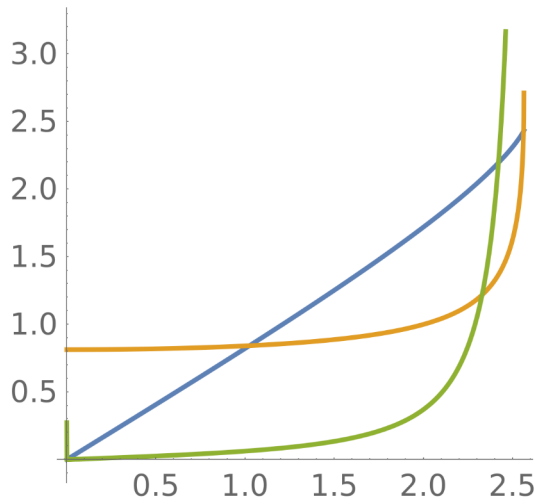
Az Airy – Kavrajcskij-kritérium (I.19) szerinti legjobb síkvetület sugárfüggvényét egy β_H sugarú kiskörre a (IV.4)-ből, a (IV.6)-ból és a síkvetületek póluspontosságból következően a következő egyenletek adják:

$$\frac{\ln \frac{\varrho}{\sin \beta}}{\varrho} \sin \beta - \frac{\cos \beta \ln \frac{d\varrho}{d\beta}}{\frac{d\varrho}{d\beta}} - \frac{\sin \beta \left(1 - \ln \frac{d\varrho}{d\beta}\right) d^2 \varrho}{\left(\frac{d\varrho}{d\beta}\right)^2 d\beta^2} = 0 \quad (\text{IV.24.a})$$

$$\left. \frac{d\varrho}{d\beta} \right|_{\beta=\beta_H} = 1 \quad (\text{IV.24.b}) \quad \varrho(0) = 0 \quad (\text{IV.24.c})$$

A két peremfeltétellel rendelkező differenciálegyenletet numerikus módszerekkel lehet megoldani, melyhez az interneten korlátozott mértékben ingyenesen is használható WOLFRAM MATHEMATICA (2017) szoftver nyújtott segítséget. Sajnos a Wolfram sem tudta a megoldást tökéletesen kiszámolni: a (IV.24.a) differenciálegyenlet $\beta = 0$ helyen nullával osztás miatt numerikusan nem számítható, így a (IV.24.c) peremfeltételt nem lehet pontosan a pólusban, csak annak közelében megadni. A sugárfüggvény képét (IV.2. ábra) megtekintve három következtetés sejthető:

- az ismeretlen függvény valószínűleg páratlan;
- a függvény deriváltja szigorúan monoton nő;
- a sugárfüggvény deriváltja valahol a déli féltekén feltehetően végtelenbe divergál, mert a Wolfram egy bizonyos ponton túl szingularitásra hivatkozva nem képes tovább számolni. A szingularitás helye függ a β_H sugártól. Túl nagy



IV.2. ábra. A legjobb valódi síkvetület numerikus megoldása $\beta_H = 2$ radián esetben. A kék a sugarfüggvény, a narancs az első, a zöld a második derivált (WOLFRAM MATHEMATICA 2017)

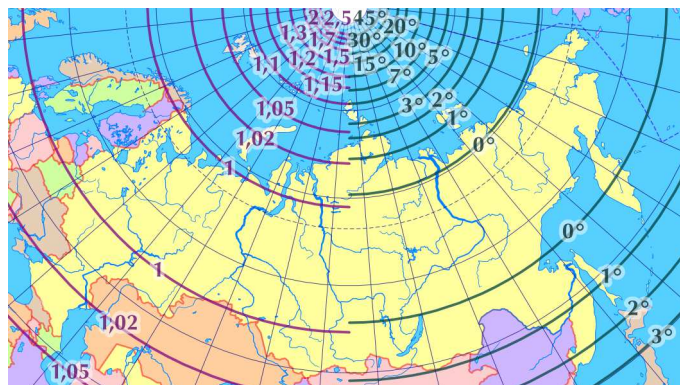
β_H esetén ($>140^\circ$) a Wolfram már nem talál megoldást numerikus módszerrel sem.

Megfoghatóbb megoldás hiányában a fejezet hátralévő részében, ha a legjobb vetület egyenletéből egy függvény ismeretlen, azt valamilyen sorral közelítem, melynek együtthatóit tekintem ismeretlennek. A torzultság minimalizálása így a skalár együtthatók III.2.b. fejezetben ismerttetett optimalizálását jelenti.

Ismeretlen függvény a ϱ , melyet MacLaurin-sorral közelíték, és a kúpvetületek esetében ismeretlen az n konstans. Mivel kúpvetületeket a függőleges szimmetria hiánya miatt (IV.3. ábra) csak kis területekre érdemes használni, elegendő a másodfokú közelítés (GYÖRFFY – KLINGHAMMER, 2004):

$$\varrho = r_0 + r_1\beta + r_2\beta^2 + \dots \quad (\text{IV.25})$$

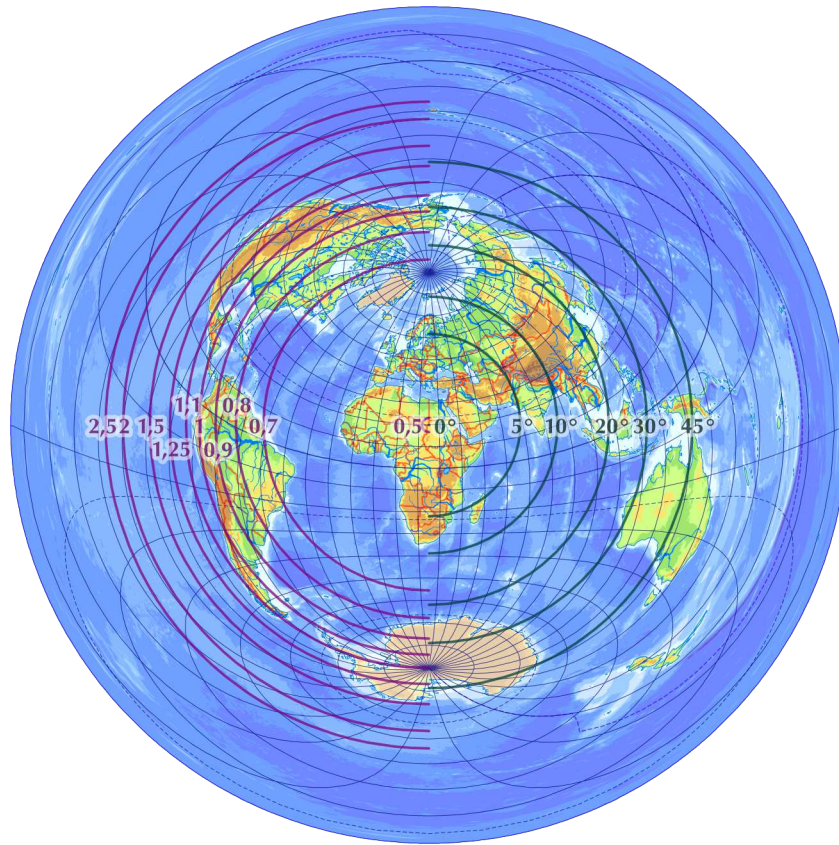
ahol $r_0 = 0$, ha csak a póluspontos kúpvetületek között keresünk megoldást.



IV.3. ábra. A legjobb valódi kúpvetület Oroszországra

A síkvetületek esetében bár a sugárfüggvény argumentuma sohasem lehet negatív, érdemes kikötni, hogy a függvény páratlan legyen, mert így a leképezés a vetületi középpontban – a segédpólusban – is folytonosan differenciálható. A IV.2. ábráról is páratlan sugárfüggvényt sejtettünk, és ezt a sejtést erősíti, hogy a direkt optimalizálás során páratlan sugárfüggvényt keresve kevesebb együtthatóval is alacsonyabb torzultságot sikerült elérni (IV.4. ábra). A tapasztalatok szerint a 7. hatvány figyelmen kívül hagyása sem vizuális sem matematikai szempontból nem okoz már számottevő eltérést.

$$\varrho = r_1\beta + r_3\beta^3 + r_5\beta^5 + \dots \quad (\text{IV.26})$$



IV.4. ábra. A legjobb valódi síkvetület közelítése a teljes földfelszínre (ferdetengelyű elhelyezés)

Fenti polinomokat az (I.18)-ban megadott teljes torzultságra optimalizáltam, mert a III.4. fejezetben megállapítottuk, hogy a terület- és szögtorzultság a két legfőbb faktor. A felületek alakhű megjelenítése érdekében itt és a továbbiakban $p = 1/2$ értéket választottam, de a számítás más $0 < p < 1$ esetben is értelmes. Az ábrákon látható numerikusan optimalizált vetületek együtthatói a C. függelékben találhatóak. Szintén a függelékben kereshető meg a vetületek torzultsága, melyeket

össze lehet vetni egy, szintén a függelékben feltüntetett, hasonló tulajdonságú, de megszokott vetület torzultságával.

Ha követelmény a területtartás ($p = 1$), a szögtartás ($p = 0$) vagy a meridiánban hossztartás, akkor a megfelelő speciális torzulású sík- és kúpvetületek sugárfüggvényei ismertek, csak konstansokat kell optimalizálni. Az optimalizálás tapasztalatai azt mutatják, hogy a valódi hengervetületektől eltérően mind n , mind a torzulásmentes paralelkörök elhelyezkedése nem kizárólag az ábrázolt terület függvénye, azok optimális értékei ugyanarra a területre e három vetülettípustól eltérők. A legjobb általános torzulású valódi kúpvetületnek nincs is torzulásmentes paralelköre.

IV.3. Képzetes hengervetületek

Képzetes hengervetületeknek nevezzük azokat a vetületeket, amelyekben a paralelkörök párhuzamos egyenesek:

$$x = x(\varphi, \lambda) \quad (\text{IV.27.a}) \quad y = y(\varphi) \quad (\text{IV.27.b})$$

ahol a szimmetria miatt $y(\varphi)$ tetszőleges szigorúan monoton növekvő, kétszer differenciálható, páratlan függvény, és $x(\varphi, \lambda)$ λ -nak szigorúan monoton növekvő, páratlan, míg φ -nek páros függvénye.

Az a és b hossztorzulások kiszámítása az I.2.b. fejezetben található általános képletekkel történik, figyelembe véve, hogy $\partial y / \partial \lambda \equiv 0$. A végeredmény megtalálható GYÖRFFY (2012) tankönyvében.

A képzetes hengervetületek nagy népszerűségnek örvendenek, ezért számtalan kutatás foglalkozott velük. Kiemelendő, hogy GYÖRFFY (2016) bebizonyította: bármely Egyenlítőre szimmetrikus gömbövre az Airy – Kavrajcskij-kritérium szerinti legjobb képzetes hengervetület középmeridiánban hossztartó.

Ha semmilyen további követelményt nem kívánunk támasztani, a szokásos ötödfokú* közelítéssel élhetünk (IV.5.a. ábra):

$$x = \xi_{01}\lambda + \xi_{03}\lambda^3 + \xi_{21}\varphi^2\lambda + \xi_{05}\lambda^5 + \xi_{23}\varphi^2\lambda^3 + \xi_{41}\varphi^4\lambda + \dots \quad (\text{IV.28.a})$$

$$y = v_1\varphi + v_3\varphi^3 + v_5\varphi^5 + \dots \quad (\text{IV.28.b})$$

* Ebben az esetben a magasabb fokszámú tagok figyelembe vétele akár 1-3% javulást okozhat a globális torzultságban, ugyanakkor a sok együtt optimalizált paraméter igen labilissá teszi a szimplex-eljárást. Gyakori, hogy különböző kezdőértékekre egészen más, torzultsági mérőszámokban viszont alig eltérő paraméterkombinációkhoz konvergál.

de Györffy megállapítása alapján, ha $p = 1/2$ és az ábrázolni kívánt terület jól közelíthető foktrapézzal, akkor lehet egyszerűen $y = \varphi$ is.

Póluspontos képzetes hengervetület is készíthető (CANTERS, 2002), ha $x(\pm \pi/2, \lambda) \equiv 0$. Ezt legegyszerűbben úgy érhetjük el, hogy (IV.28.a)-t beszorozzuk $\cos \varphi$ -vel:

$$x = (\xi_{01}\lambda + \xi_{03}\lambda^3 + \xi_{21}\varphi^2\lambda + \xi_{05}\lambda^5 + \xi_{23}\varphi^2\lambda^3 + \xi_{41}\varphi^4\lambda + \dots) \cos \varphi \quad (\text{IV.29})$$

Az eredményül kapott vetület póluspontja hegyes (IV.5.b. ábra), mely nem szerencsés, hiszen a térképolvasók nem szeretik a hegyes póluspontot (ŠAVRIČ és mások, 2015) és a vetület nem teljesíti a hasonlósági elvet (GYÖRFFY, 2016). A sima póluspont matematikai megfogalmazása: ha $\varphi \rightarrow \pm\pi/2$, akkor $\partial x/\partial \varphi \rightarrow \mp\infty$.^{*} A feltételt kielégítő póluspontos vetületeket BARANYI (1987) nyomán *pólusívesnek* nevezem (IV.5.c. ábra).

Pólusíves képzetes hengervetület tehát úgy készíthető, hogy a (IV.28.a)-t φ olyan függvényével szorozzuk be, mely $\pm\pi/2$ -ben zérus, de deriváltja végtelenbe divergál. A legegyszerűbb megfelelő függvény a félkör egyenlete:

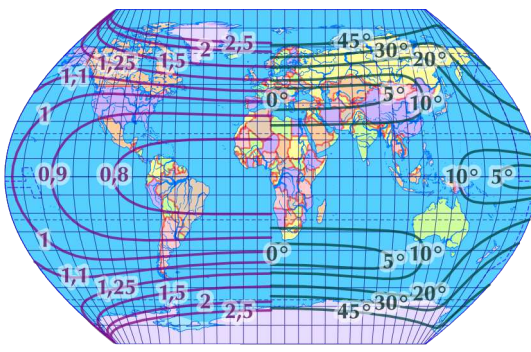
$$x = (\xi_{01}\lambda + \xi_{03}\lambda^3 + \xi_{21}\varphi^2\lambda + \xi_{05}\lambda^5 + \xi_{23}\varphi^2\lambda^3 + \xi_{41}\varphi^4\lambda + \dots) \sqrt{1 - \left(\frac{2}{\pi}\varphi\right)^2} \quad (\text{IV.30})$$

A tapasztalatok szerint a póluspontos vetületek általános képleteit optimalizálva rosszabb torzultsági értékek jönnek ki, mint pólusíves vetületet keresve (C. függelék), holott a pólusíves vetületeket a póluspontos vetületek definíciója tartalmazza. Ez arra enged következtetni, hogy az optimális torzulású póluspontos képzetes hengervetület valószínűleg pólusíves is. Megjegyzendő, hogy a vetületek kontúrvonala igen szokatlan, kartográfiai felhasználáshoz szükséges lehet egy kontúrvonal-javító eljárás alkalmazása (GYÖRFFY, 2016).

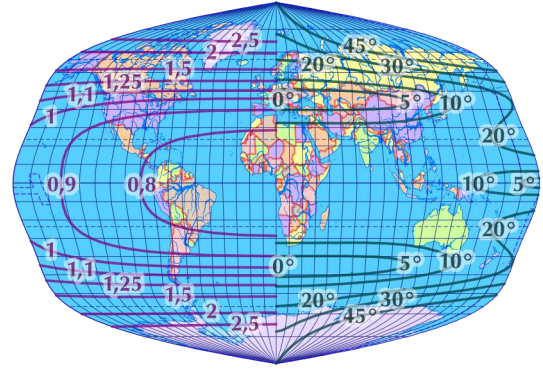
Készíthető területtartó képzetes hengervetület is, melyet SNYDER (1985) tanulmányozott. Levezetés nélkül a területtartás egyenlete:

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{1}{\cos \varphi} \frac{dy}{d\varphi} = 1 \quad (\text{IV.31})$$

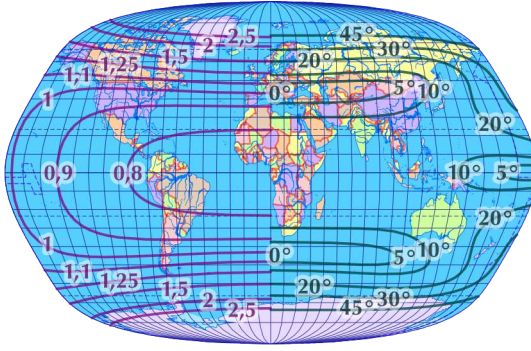
^{*} Ez a feltétel valójában elegendő, ha $\lambda = \pm\pi$ helyen teljesül, hiszen a többi meridián nem feltétlenül kell, hogy törésmentesen fusson be a pólusba. Azonban esztétikai szempontokból – különösen ferdetengelyű elhelyezésnél – érdemes az összes meridián törésmentességét előírni.



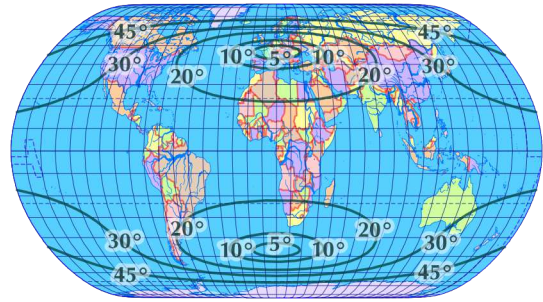
a) Pólusvonalas



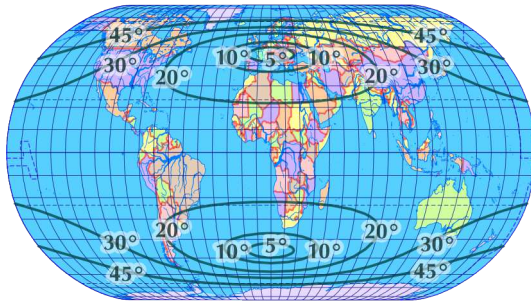
b) Póluspontos



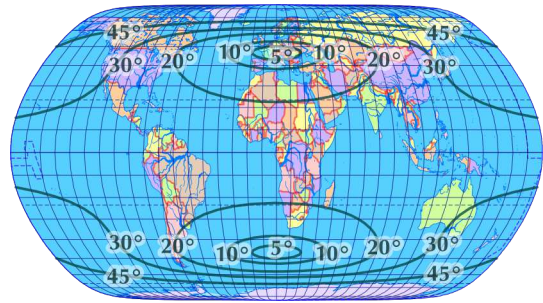
c) Pólusíves



d) Póluspontos területtartó



e) Pólusvonalas területtartó



f) Pólusíves területtartó

IV.5. ábra. Legjobb képzetes hengervetületek a $\pm 85^\circ$ -os szélességek közötti területekre optimalizálva

Ha a (IV.28.b)-t behelyettesítjük a fenti egyenletbe, akkor x kifejezhető, és póluspontos vetületet kapunk:

$$x = \frac{\lambda \cos \varphi}{v_1 + 3v_3\varphi^2 + 5v_5\varphi^4 + \dots} \quad (\text{IV.32})$$

Snyder készített optimális torzulású területtartó pólusvonalas képzetes hengervetületet is. Ebben azt a trükköt alkalmazta, hogy $dy/d\varphi$ helyére egy negyedfokú páros polinom és $\cos \varphi$ szorzatát helyettesítette. Ekkor a (IV.31)-ből mind x és y kifejezhető volt a szeparábilis differenciálegyenletek megoldásával:

$$x = \frac{\lambda}{v_1 + v_3\varphi^2 + v_5\varphi^4 + \dots} \quad (\text{IV.33.a})$$

$$y = v_1 \sin \varphi + v_3 (\varphi^2 \sin \varphi + 2\varphi \cos \varphi - 2 \sin \varphi) + \\ + v_5 (\varphi^4 \sin \varphi + 4\varphi^3 \cos \varphi - 12\varphi^2 \sin \varphi - 24\varphi \cos \varphi + 24 \sin \varphi) + \dots \quad (\text{IV.33.b})$$

Snyder az együtthatókat az Airy – James – Clarke-kritériumra optimalizálta. A számításokat megismételtem az Airy – Kavrajszkij-kritériumra, és az eredményül kapott vetületek (IV.5.d. és IV.5.e. ábra) csak kissé lettek kellemesebbek a szemnek. Megállapítható továbbá, hogy a póluspontos és pólusvonalas változat egymástól szabad szemmel alig különböztethető meg.

Természetesen pólusíves területtartó képzetes hengervetület is készíthető, ehhez az kell, hogy x nevezője nullához tartson, de az egész tört határértéke is nulla legyen a pólusokban. Ennek elérésére koszinusz helyett a kör egyenletével szoroztam be y deriváltját, az alábbi egyenletekben $\Psi = \sqrt{1 - (2\varphi/\pi)^2}$:

$$x = \frac{\lambda \cos \varphi}{\Psi (v_1 + v_3 \varphi^2 + v_5 \varphi^4 + \dots)} \quad (\text{IV.34.a})$$

$$y = v_1 \left(\frac{\varphi}{2} \Psi + \frac{\pi}{4} \arcsin \frac{2\varphi}{\pi} \right) + v_3 \left(\frac{\varphi^3}{4} \Psi - \frac{\pi^2 \varphi}{32} \Psi + \frac{\pi^3}{64} \arcsin \frac{2\varphi}{\pi} \right) + \\ + v_5 \left(\frac{\varphi^5}{6} \Psi - \frac{\pi^2 \varphi^3}{96} \Psi - \frac{\pi^4 \varphi}{256} \Psi + \frac{\pi^5}{512} \arcsin \frac{2\varphi}{\pi} \right) + \dots \quad (\text{IV.34.b})$$

A IV.5.f. ábra alig különbözik a másik két területtartó vetülettől, torzultsága alig rosszabb (C. függelék). Előnye ugyanakkor a póluspontossal szemben a pólusok környékének simább ábrázolása.

Az alábbiakban látni fogjuk, hogy a képzetes hengervetületek bár egészen jól alkalmazhatóak világtérképekre, lehetséges kedvezőbb vetületeket is találni. A II.3.e. fejezetben láttuk, hogy a képzetes hengervetületek átláthatóbb fokhálózata nem segítette különösebben a térképolvasást, de esztétikai megfontolások alapján a földrajzi övezetességhez kapcsolódó témákhoz mindenképp képzetes hengervetület használata javasolt.

IV.4. Képzetes kúpvetületek

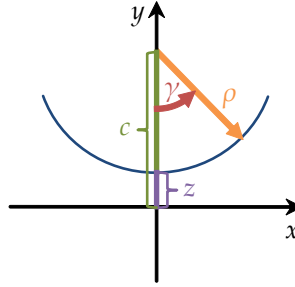
IV.4.a. Általános leírás

Képzetes kúpvetületnek nevezzük azokat a vetületeket, melyekben a paralellkörök képei körívek. A vetületet a kényelem kedvéért ϱ, γ, c vagy ϱ, γ, z polárkoordinátákkal írjuk fel (IV.6. ábra):

$$x = \varrho(\beta) \sin \gamma(\beta, \lambda) \quad (\text{IV.35.a}) \quad y = c(\beta) - \varrho(\beta) \cos \gamma(\beta, \lambda) \quad (\text{IV.35.b})$$

$$c(\beta) = z(\beta) + \varrho(\beta) \quad (\text{IV.35.c}) \quad y = z + \varrho - \varrho \cos \gamma \quad (\text{IV.35.d})$$

ahol $\varrho(\beta)$ tetszőleges kétszer differenciálható függvény, $\gamma(\beta, \lambda)$ λ páratlan, szigorúan monoton növekvő függvénye és $z(\beta)$ szigorúan monoton csökkenő függvény, c és z közül pedig elégséges csak az egyiket megadni.



IV.6. ábra. Polárkoordináták értelmezése képzetes vetületekben

A képzetes kúpvetületeket három csoportba szokás osztani. Ha $c \equiv \text{const.}$, a vetületet *igazi* vagy *koncentrikus képzetes kúpvetületnek* nevezzük. Ha speciálisan $\varrho = \tan \beta$ alakú és $z(\beta)$ lineáris függvény, *polikónikus vetületről* beszélünk. Minden más képzetes kúpvetület *pszeudopolikónikus*.

Teljes Földet ábrázoló képzetes kúpvetületektől elvárhatjuk, hogy a középméridiánon kívül az Egyenlítőre is szimmetrikus legyen. Ebben az esetben a fenti képletek β helyett φ függvényében is felírhatók. A képzetes kúpvetületet *szimmetrikusnak* nevezem, ha $\varrho(\varphi)$ és $z(\varphi)$ páratlan, valamint $\gamma(\varphi, \lambda)$ φ -ben páros függvény, továbbá ha $\varphi \rightarrow 0$, akkor $\varrho \rightarrow \pm\infty$ és $\gamma \rightarrow 0$. Megállapíthatjuk, hogy az igazi képzetes kúpvetületek mindig aszimmetrikusak, míg a polikónikus vetületek mindig szimmetrikusak.

A képzetes kúpvetületek minden családjában találhatunk területtartó vetületeket. Ortogonális vetület csak az igazi képzetes kúpvetületek között nincs. A pszeudopolikónikus vetületek között találunk szögtartó leképezéseket (pl. Lagrange vetülete), de ezeknek optimalizálása nem kifizetődő, mert egyrészt a szögtartás egyenleteinek megoldása már egyszerű esetekben is elliptikus függvényekhez vezet, másrészt, ha nem csak a képzetes kúpvetületek között keresünk optimális szögtartó vetületet, a megoldást CSEBISEV (1856) tételéből akár analitikusan is megkaphatjuk.

IV.4.b. Aszimmetrikus képzetes kúpvetületek

Általános aszimmetrikus képzetes kúpvetületet a valódi kúpvetületekhez hasonlóan, polinomokkal írhatunk fel. A sugárfüggvény marad a (IV.25)-ben megadott képlet, a polárszöget pedig a következő képlettel közelítem:

$$\gamma = g_{01}\lambda + g_{03}\lambda^3 + g_{11}\beta\lambda + g_{05}\lambda^5 + g_{13}\beta\lambda^3 + g_{21}\beta^2\lambda + \dots \quad (\text{IV.36})$$

Mint látszik, β magasabb fokú tagjait nem vettem figyelembe. Ennek az oka a túlzott számításigény elkerülése mellett az, hogy vízszintes tengelyre aszimmetrikus vetületet csak regionális térképezéshez van értelme használni. Így nagy szélességkülönbségekkel nem kell számolni. Ezzel szemben magasabb szélességeken már nagy hosszúságkülönbségek is előfordulhatnak, GYÖRFFY (2002) például kimutatta, hogy Kanada esetén már az ötödfokú tag is számottevő hatású.

Ha elvárás a parallelkörök koncentrikussága, akkor $c \equiv 0$ (IV.7.a. ábra). Pszeudopolikónikus vetületeknél inkább z -t érdemes megadni (IV.7.e. ábra):

$$z = \zeta_1\beta + \zeta_2\beta^2 + \dots \quad (\text{IV.37})$$

mely jelölés mellett igény esetén egyszerűen kiköthető hossztartó középmeridián: $\zeta_1 = -1, \zeta_2 = 0$.

Póluspontos vetület kétféleképp kényszeríthető ki: egyrészt a (IV.25)-ben $r_0 = 0$ érték megadásával, másrészt (IV.36)-ot $\sin \beta$ -val szorozva.

Területtartó igazi képzetes kúpvetületet kapunk a (IV.25) sugárfüggvény alkalmazása mellett, ha

$$\gamma = \frac{\sin \beta}{\varrho(r_1 + 2r_2\beta + \dots)} \lambda \quad (\text{IV.38})$$

Így vetületünk biztosan póluspontos. $r_0 = 0$ esetben ez triviális. Ha $r_0 \neq 0$ és $r_1 \neq 0$ (utóbbit joggal feltételezzük), akkor γ nevezője a pólusban nem nulla, a számlálóban viszont $\sin \beta$ nulla. A vetület külsőleg Bonne vetületére emlékeztet (IV.7.b. ábra), és általában kedvezőtlen torzulású, de T-alakú területeken érdemes alkalmazni (KERKOVITS, 2017b).

Pólusvonalas vetületet úgy készíthetünk, hogy γ nevezőjét a pólusban nullával egyenlővé tesszük. Legyen például:

$$\varrho \frac{d\varrho}{d\beta} = (r_1 + r_2\beta + \dots) \sin \beta \quad (\text{IV.39})$$

A területtartás differenciálegyenletének megoldása (az integrációs konstans legyen r_0):

$$\varrho = \sqrt{2[r_0 + r_1 \cos \beta + r_2(\sin \beta - \beta \cos \beta) + \dots]} \quad (\text{IV.40.a})$$

$$\gamma = \frac{\lambda}{r_1 + r_2\beta + \dots} \quad (\text{IV.40.b})$$

Ha $r_0 = 0$, vetületünk az északi pólusban póluspontos, de a póluspontos területtartó igazi képzetes kúpvetülettől eltérően a déli pólusban már pólusvonalas. A vetület kinézete Albers vetületéhez hasonlít a leginkább, igen nagy kelet–nyugati kiterjedésű terület esetén a meridiánok közel kiegyenesednek (IV.7.c. ábra). A vetület valamely szélességi kör mentén fekvő, nagyobb kiterjedésű területekre alkalmazva jóval kisebb torzulásokkal rendelkezik, mint más területtartó vetületek.

Területtartó pszeudopolikónikus vetületekben γ csak λ implicit függvényeként fejezhető ki ϱ és z ismeretében az alábbi egyenletből:

$$\lambda = \frac{\varrho}{\sin \beta} \frac{d\varrho}{d\beta} \gamma - \frac{\varrho}{\sin \beta} \left(\frac{dz}{d\beta} + \frac{d\varrho}{d\beta} \right) \sin \gamma \quad (\text{IV.41})$$

A (IV.25) és (IV.37) polinomokat behelyettesítve póluspontos vetületet kapunk, mely még mindig erősen emlékeztet Bonne vetületére, hiszen a fenti egyenletben $\sin \beta = 0$ esetén csak $\gamma = 0$ lehet megoldás. Pólusvonalas vetület mégis készíthető. Legyen az igazi képzetes kúpvetülethez hasonlóan a sugárfüggvény most is (IV.40.a).

A vetület pólusvonalasságához szükséges, hogy mind $dc/d\beta$ mind $d\varrho/d\beta$ a pólusban zérus legyen.* Utóbbi feltételt a sugárfüggvényünk már teljesíti, előbbi feltételnek pedig megfelel például a

$$c = \varsigma_1 \cos \beta + \varsigma_2(\sin \beta - \beta \cos \beta) + \dots \quad (\text{IV.42.a})$$

Ekkor γ implicit függvény:

$$\lambda = (r_1 + r_2\beta + \dots) \gamma - \varrho(\varsigma_1 + \varsigma_2\beta + \dots) \sin \gamma \quad (\text{IV.42.b})$$

*Ekkor γ implicit függvényében a pólusban 0/0 hányadosok lesznek, melyek határértéke bármilyen valós szám lehet.

Az így megadott vetület az együtthatók jó megválasztásával rendkívül kedvező szögtorzulásokkal rendelkezik meridián mentén elhelyezkedő, közepes szélességen fekvő területre (IV.7.f. ábra).

Ortogonalis pszeudopolikónikus vetületet kapunk a (IV.25) és (IV.37) polinomok mellett, ha:

$$\gamma = 2 \operatorname{arctg} \left(\varrho^{-\frac{\zeta_2}{r_2}} \left[\frac{\beta + \frac{r_1 - \sqrt{r_1^2 - 4r_0r_2}}{2r_2}}{r_2 \left(\beta + \frac{r_1 + \sqrt{r_1^2 - 4r_0r_2}}{2r_2} \right)} \right]^{-\frac{\zeta_2 \left(\frac{r_2\zeta_1 - r_1}{\zeta_2} \right)}{r_2 \sqrt{r_1^2 - 4r_0r_2}}} f(\lambda) \right) \quad (\text{IV.43.a})$$

A fenti kifejezés határértéke $r_2 = 0$ helyen:

$$\gamma = 2 \operatorname{arctg} \left[e^{\frac{\zeta_2}{r_1\beta} \left(\frac{r_0}{r_1} \beta \right)^{\frac{2\zeta_2 \frac{r_0}{r_1} - \zeta_1}{r_1}}} f(\lambda) \right] \quad (\text{IV.43.b})$$

A képletekben található $f(\lambda)$ tetszőleges páratlan függvény, így közelítése:

$$f(\lambda) = g_1\lambda + g_3\lambda^3 + g_5\lambda^5 + \dots \quad (\text{IV.43.c})$$

A fenti képletek levezetésének elve – kevesebb együtthatóval – GYÖRFFY (2002) írásában található meg. Ezek a vetületek tapasztalataim szerint meridián mentén fekvő vagy közel négyzet alakú területekre adnak kiváló képet, a merőleges fokhálózat kiválóan alkalmassá teszi az atlaszkartográfia számára (IV.7.d. ábra).

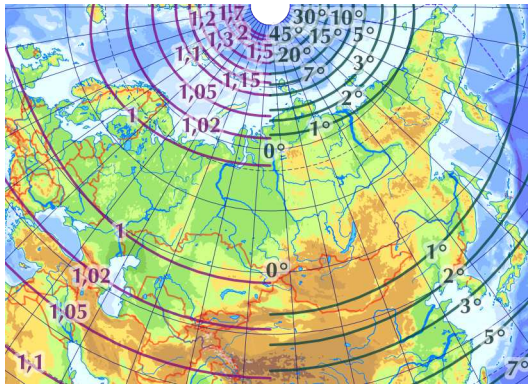
IV.4.c. Szimmetrikus képzetes kúpvetületek

Az Egyenlítő ábrázolása esetén szimmetriát várunk el a vetülettel szemben, melynek matematikai megfogalmazását fentebb ismertettem. Az Egyenlítő végtelen nagyságú sugarát polinommal nem lehet jelölni. Ugyanakkor egy törtfüggvény már megfelelő:

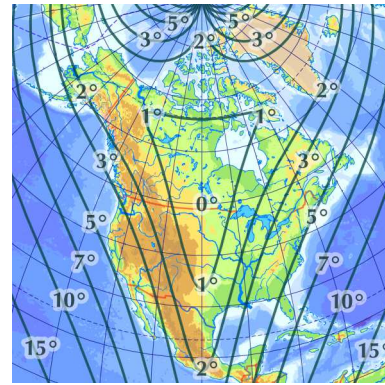
$$\varrho = \frac{1}{r_1\varphi + r_3\varphi^3 + r_5\varphi^5 + \dots} \quad (\text{IV.44.a})$$

γ -t nem érdemes közvetlenül kifejezni, mert az Egyenlítő közelében végtelenül kis szögek vannak, hanem írjuk fel azt az ívhosszat, amely a paralelkör mentén a középmeridián és a leképezett pont között van:

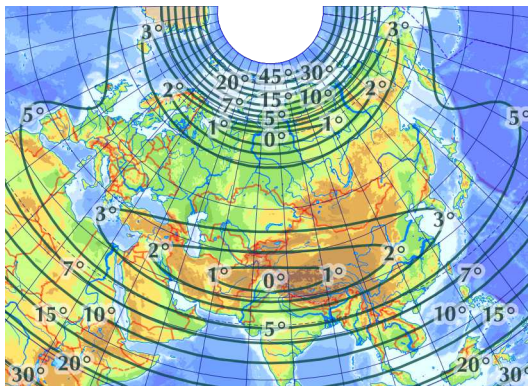
$$\varrho\gamma = g_{01}\lambda + g_{03}\lambda^3 + g_{21}\varphi^2\lambda + g_{05}\lambda^5 + g_{23}\varphi^2\lambda^3 + g_{41}\varphi^4\lambda + \dots \quad (\text{IV.44.b})$$



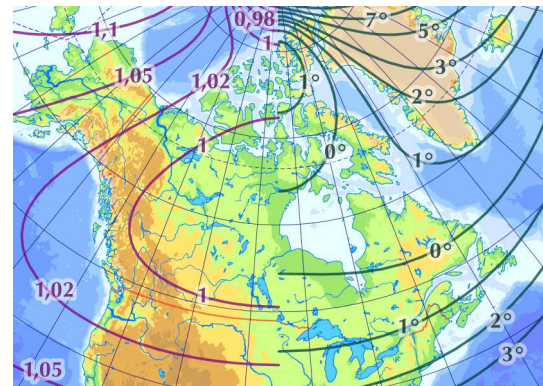
a) Koncentrikus (volt Szovjetunió)



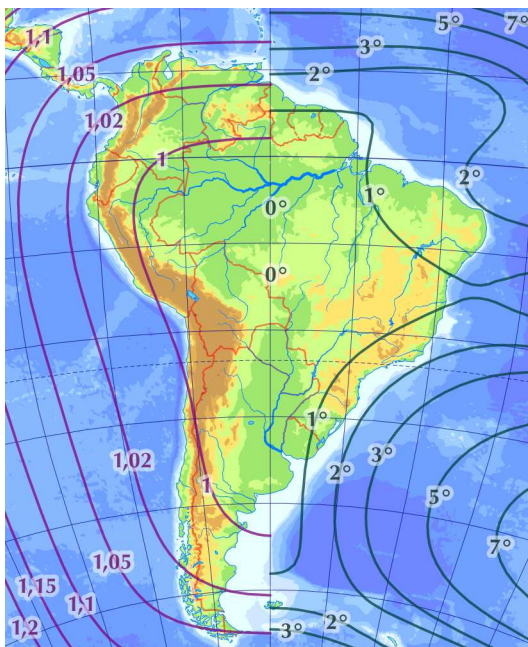
b) Koncentr. póluspontos területtartó (É-Amerika)



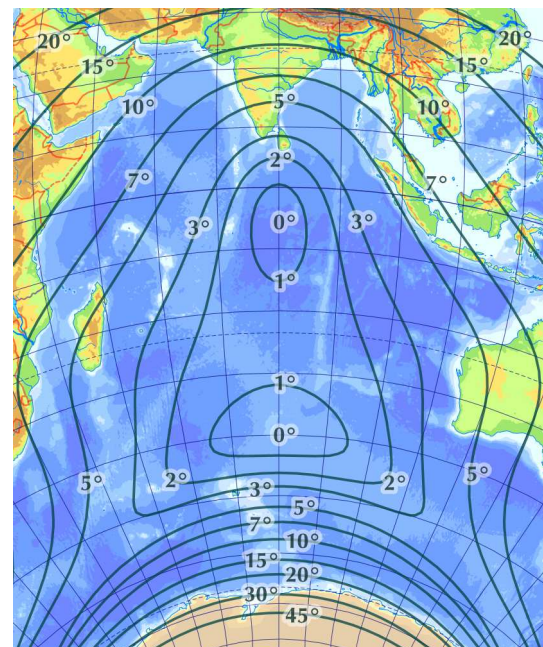
c) Koncentr. pólusvonalas területtartó (Eurázsia)



d) Ortogonális (Kanada)



e) Pszeudopolikónikus (Dél-Amerika)



f) Pszeudopolikónikus területtartó (Indiai-óceán)

IV.7. ábra. Optimális torzulású képzetes kúpvetületek

Ezen kívül

$$z = \zeta_1 \varphi + \zeta_3 \varphi^3 + \zeta_5 \varphi^5 + \dots \quad (\text{IV.44.c})$$

A vetületi egyenletek határértéke az Egyenlítőn így

$$x|_{\varphi=0} = g_{01} \lambda + g_{03} \lambda^3 + g_{05} \lambda^5 + \dots \quad (\text{IV.44.d})$$

Ez a képzetes kúpvetület már alkalmas a teljes földfelszín ábrázolására (IV.8.a. ábra), a kapott optimális vetület a CNIIGAIK által népszerűsített vetületekre emlékeztet (GINZBURG – SZALMANOVA, 1957). Ezek a kedvező vetületek a szovjet kartográfia hatására méltán értek el nagy népszerűséget Kelet-Európában is. A vetület a torzulásai kb. 10%-kal kedvezőbbek a teljes földfelszínre nézve, mint a képzetes hengervetületek esetén. Ez a különbség a C. függelékben azért nem látszik, mert nem volt lehetőségem az optimalizálás határát $\pm 85^\circ$ -nál kijelölni, mert úgy a pólusok közvetlen közelében elfogadhatatlan mértékű torzulások léptek volna föl.

Szokatlan lehet a vetületben található ívelt pólusvonal. Egyenes pólusvonalat úgy érhetünk el, hogy ϱ a pólusban is végtelen. Ehhez a sugárfüggvény nevezőjét egy olyan függvénnyel kell szorozni, amely a pólusban zérus.

Lehetőség van ortogonális fókálózat elérésére (IV.8.b. ábra). Az ortogonalitás egyenlete (GYÖRFFY, 2002):

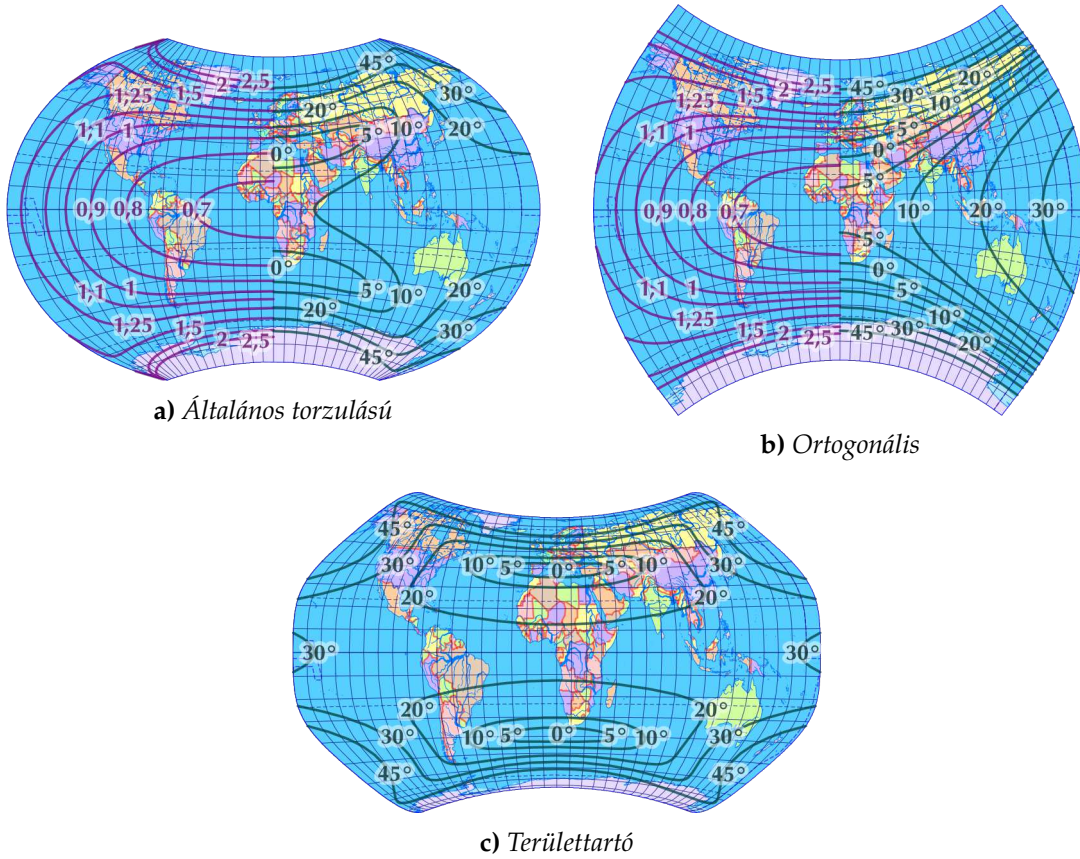
$$\sin \gamma \left(\frac{d\varrho}{d\varphi} + \frac{dz}{d\varphi} \right) = -\varrho \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} \quad (\text{IV.45})$$

A (IV.44.a) és (IV.44.c) behelyettesítésével a parciális differenciálegyenletet a szokásos módon megoldva a következő γ adódik:

$$\begin{aligned} \ln \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = & \ln(g_1 \lambda + g_3 \lambda^3 + g_5 \lambda^5 + \dots) - \ln \varrho - \left[r_1 \zeta_1 \frac{\varphi^2}{2} + (3r_1 \zeta_3 + r_3 \zeta_1) \frac{\varphi^4}{4} + \right. \\ & \left. + (5r_1 \zeta_5 + 3r_3 \zeta_3 + r_5 \zeta_1) \frac{\varphi^6}{6} + (5r_3 \zeta_5 + 3r_5 \zeta_3) \frac{\varphi^8}{8} + 5r_5 \zeta_5 \frac{\varphi^{10}}{10} + \dots \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.46})$$

ahol az integrációs konstans λ függvénye, melyet fent a szimmetria érdekében egy páratlan polinom logaritmusával közelítettem. Az Egyenlítőn az x koordináta határértéke így ezen polinom értékének kétszerese.

Területtartó változat is készíthető. Ha a (IV.44.a) és (IV.44.c) polinomokat megtartjuk, és behelyettesítünk a területtartás egyenletét jelentő (IV.41)-be, akkor a



IV.8. ábra. Képzetes kúpvetületek a teljes Föld ábrázolására

pólusban $\gamma = 0$ lesz, tehát a vetület póluspontos. Pólusvonalas leképezés néhány matematikai trükkel állítható elő (IV.8.c. ábra). Legyen

$$\frac{d(1/\varrho)}{d\varphi} = (r_1 + r_3\varphi^2 + r_5\varphi^4 + \dots) \cos \varphi \quad (\text{IV.47.a})$$

$$\frac{dz}{d\varphi} = (\zeta_1 + \zeta_3\varphi^2 + \zeta_5\varphi^4 + \dots) \cos \varphi \quad (\text{IV.47.b})$$

Ekkor integrálással a következő függvényeket kapjuk:

$$\begin{aligned} 1/\varrho = & r_1 \sin \varphi + r_3(\varphi^2 \sin \varphi + 2\varphi \cos \varphi - 2 \sin \varphi) + \\ & + r_5(\varphi^4 \sin \varphi + 4\varphi^3 \cos \varphi - 12\varphi^2 \sin \varphi - 24\varphi \cos \varphi + 24 \sin \varphi) + \dots \quad (\text{IV.48.a}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z = & \zeta_1 \sin \varphi + \zeta_3(\varphi^2 \sin \varphi + 2\varphi \cos \varphi - 2 \sin \varphi) + \\ & + \zeta_5(\varphi^4 \sin \varphi + 4\varphi^3 \cos \varphi - 12\varphi^2 \sin \varphi - 24\varphi \cos \varphi + 24 \sin \varphi) + \dots \quad (\text{IV.48.b}) \end{aligned}$$

A függvényeket behelyettesítem a (IV.41)-be, fölhasználva, hogy a láncszabály szerint $d\varrho/d\beta = d(1/\varrho)^{-1}/d(1/\varrho) \cdot d(1/\varrho)/d\varphi \cdot d\varphi/d\beta = -(1/\varrho)^{-2} \cdot d(1/\varrho)/d\varphi \cdot (-1) = \varrho^2 d(1/\varrho)/d\varphi$:

$$\lambda = \varrho^3(r_1 + r_3\varphi^2 + r_5\varphi^4 + \dots)\gamma + \left[\varrho(\zeta_1 + \zeta_3\varphi^2 + \zeta_5\varphi^4 + \dots) - \varrho^3(r_1 + r_3\varphi^2 + r_5\varphi^4 + \dots) \right] \sin \gamma \quad (\text{IV.48.c})$$

Ha ϱ végtelen nagy – mint például az Egyenlítőn –, akkor $y = z$; x pedig határérték-számítással a következő harmadfokú egyenlet valós gyöke lesz:

$$\lambda = (\zeta_1 + \zeta_3\varphi^2 + \zeta_5\varphi^4 + \dots)x - (r_1 + r_3\varphi^2 + r_5\varphi^4 + \dots)\frac{x^3}{6} \quad (\text{IV.48.d})$$

IV.5. Képzetes síkvetületek

A képzetes síkvetületek elsősorban abban különböznek a képzetes kúpvetületektől, hogy a parallelkörök képei teljes körök, azaz $\gamma|_{\lambda=\pm\pi} = \pm\pi$. Mivel a térkép közepén szokatlanul nézne ki egy kör alakú lyuk, kikötjük még a póluspontosságot is: $\varrho|_{\beta=0} = 0$.

Fenti feltételekből következik, hogy a pólusban szükségszerűen szögtartás áll fenn: Mivel minden parallelkör képe kör, a pólust körbevevő végtelenül kis sugarú parallelkör képe is kör, melynek sugara a póluspontosságból következően végtelenül kicsi. Tissot tételei alapján differenciálható leképezésekben ez szükséges és elégséges feltétele a szögtartásnak. Ebből következően viszont $\gamma|_{\beta=0} = \lambda$.

IV.5.a. Koncentrikus képzetes síkvetületek

Ha feltételezzük, hogy a szélességi körök képei koncentrikusak – azaz $c \equiv 0$ –, akkor a pólus képe központi helyzetbe, az origóba kerül. Elvárható tehát a vetülettől az y mellett az x tengelyre vonatkozó szimmetria is, melyre a $\pm 90^\circ$ -os bimeridián képe kerül. Ennek felírása a $\Gamma = \gamma - \lambda$ jelölés mellett:

$$\forall m \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{R} : \Gamma(\beta, m\pi/2) \equiv 0 \wedge \Gamma(\beta, m\pi/2 + q) = -\Gamma(\beta, m\pi/2 - q) \quad (\text{IV.49})$$

azaz Γ λ -ban páratlan, π periódusú függvény, melyről a pólusban fönnálló szögtartás miatt ismert, hogy ott zérus.

Fölírhatjuk tehát γ -t, mint λ és egy páratlan Fourier-sor összegét. A sor együtthatói β függvényei, melyeket MacLaurin-sorral közelítünk; ismerve, hogy a pólusban

nullát kell kapnom. A korábbi hasonló kétváltozós függvényeknek megfelelően itt is hat együtthatót vettem figyelembe:

$$\gamma = \lambda + \sin(2\lambda)(g_{12}\beta + g_{22}\beta^2 + g_{32}\beta^3 + \dots) + \\ + \sin(4\lambda)(g_{14}\beta + g_{24}\beta^2 + \dots) + \sin(6\lambda)(g_{16}\beta + \dots) + \dots \quad (\text{IV.50})$$

Már csak a sugárfüggvény felírása maradt hátra, melyet a valódi síkvetületekhez hasonlóan a (IV.26)-tal közelíték. A koncentrikus képzetes síkvetületek alkalmazásával GINZBURG és SZALMANOVA (1957) foglalkozott. Kimutatták, hogy ezek a vetületek elsősorban ovális alakú területekre alkalmazhatók sikeresen. A fentiekben általánosított vetületet ferde transzverzális elhelyezésben, az Atlanti-óceánra alkalmazva a III.4.c. fejezetben már ismertettem, ábrák is ott találhatók. Szintén ilyen vetület jelenik meg az Airy – Kavrajszkij-kritériumra optimalizálva a 108. oldalon.

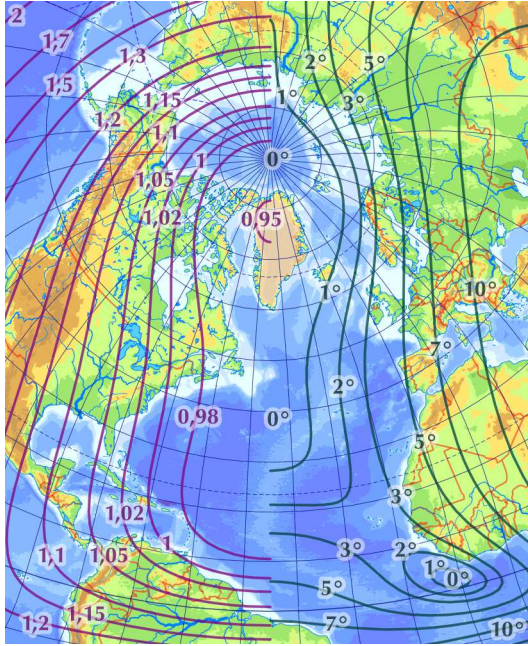
IV.5.b. Poliazimutális vetületek

Egzotikus, gyakorlatilag csak az orosz nyelvű irodalomban föllelhető vetületcsaládhoz jutunk, ha megengedjük, hogy a parallelkörök képei ne legyenek koncentrikusak. Az ilyen leképezéseket *poliazimutális*nak nevezik, ismertségük rendkívül csekély: „A poliazimutális vetületek tetszőleges torzulásúak lehetnek. Ezen vetületek gyakorlati haszna egyelőre nem teljesen világos.” – írja SZERAPINASZ (2005).

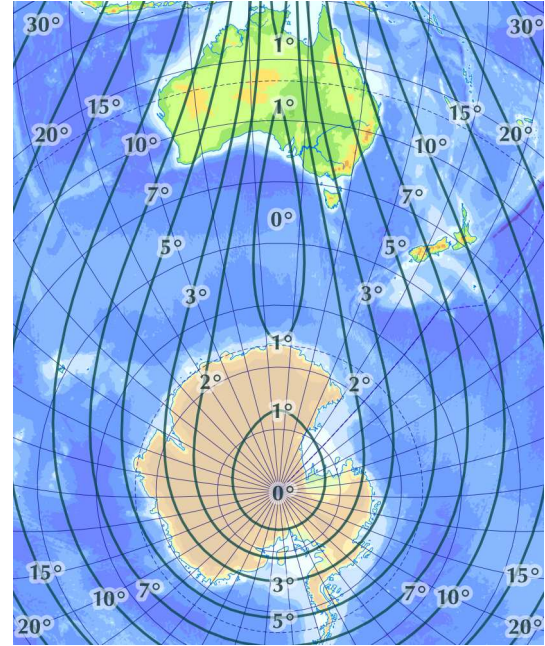
A vetületcsalád fő előnye, hogy az ábrázolás nem szakad meg a pólusokban, tehát mindenképp pólus környéki területekre ajánlható. Torzulási izovonalaik oválisak, középpontjukban nem a pólus áll, tehát a pólusra aszimmetrikus területekre kedvező választás (IV.9. ábra).

Az általános vetületi egyenletek hasonlóan a koncentrikus képzetes síkvetületekhez, de a vízszintes szimmetriát nem követeljük meg. $\gamma - \lambda$ e miatt λ -nak 2π periódusú páratlan függvénye. $c(\beta)$ függvény a pólusban megkövetelt differenciálhatóság miatt csak páros lehet.* A sugárfüggvény (IV.26), a többi ismeretlen

* Nem páros c függvény használata esetén a pólusban a közép- és ellenmeridián irányában eltérő nagyságú hossztorzulás lépne föl, mely ellentétes Tissot törvényeivel.



a) Ált. torzulású (Jeges-tenger és É-Atlanti-óceán)



b) Területtartó (Antarktisz és Ausztrália)

IV.9. ábra. Poliazimutális vetületek

függvény közelítése:

$$\gamma = \lambda + \sin(\lambda)(g_{11}\beta + g_{21}\beta^2 + g_{31}\beta^3 + \dots) + \sin(2\lambda)(g_{12}\beta + g_{22}\beta^2 + \dots) + \sin(3\lambda)(g_{13}\beta + \dots) + \dots \quad (\text{IV.51.a})$$

$$c = \varsigma_2\beta^2 + \varsigma_4\beta^4 + \dots \quad (\text{IV.51.b})$$

A poliazimutális vetületek között ortogonális, sőt szögtartó is előfordul,^{*} de a túlzott komplexitás miatt velük nem foglalkozom. Egészen egyszerű viszont fölírni a területtartó változatot. A parallelkörök által határolt göombsüvegek terület-egyenlő leképezéséből kijön a sugárfüggvény, mely Lambert síkvetületével egyező. Legyen c a (IV.51.b)-ben megadott alakú, ekkor a (IV.41)-be visszahelyettesítve és a $2 \sin(\beta/2) \cos(\beta/2) = \sin \beta$ azonosság segítségével átalakítva hosszabb számítást követően γ implicit függvényét is megkapjuk:

$$\varrho = 2 \sin \frac{\beta}{2} \quad (\text{IV.52.a})$$

$$\lambda = \gamma - \frac{\varrho(2\varsigma_2\beta + 4\varsigma_4\beta^3 + \dots)}{\sin \beta} \sin \gamma \quad (\text{IV.52.b})$$

^{*} A ferdetengelyű sztereografikus vetület például megfelel a feltételeknek, noha alapvetően valódi síkvetületnek tekintendő.

IV.6. Egyéb képzetes vetületek

Ha semmilyen feltételt nem kívánunk tenni a parallelkörökre, akkor az optimális vetület megtalálásához valamely képzetes vetület általánosításával jutunk. A kiindulási képzetes vetület nagyban befolyásolja a végeredményt, különösen a póluspontosság, a szimmetria és a szakadások tekintetében.

Ha az ellenmeridiánon található szakadást megengedjük, de a vízszintes tengelyre vonatkozó szimmetriáról nem mondunk le, a képzetes hengervetületek képletét érdemes átalakítani. Az x egyenletek változatlanul maradnak, y pedig már λ -nak is függvénye:

$$y = v_{10}\varphi + v_{30}\varphi^3 + v_{12}\varphi\lambda^2 + v_{50}\varphi^5 + v_{32}\varphi^3\lambda^2 + v_{14}\varphi\lambda^4 + \dots \quad (\text{IV.53})$$

A naiv alkalmazás a teljes földfelszínre elméletileg jó közelítése a lehetséges legkisebb torzulású vetületnek. A IV.10.a. ábrán ugyanakkor az látható, hogy a legkedvezőbb torzulású vetület nem feltétlenül jelent egyúttal esztétikus, és kartográfiai célokra elfogadható leképezést.

Javaslom ugyanakkor az így előállított vetületcsalád alkalmazását ferdetengelyű elhelyezésben, hiszen így a kedvező torzulások akárhova csoportosíthatók, miközben semmilyen, a fókhalózatra vonatkozó tulajdonság megőrzésével nem kell számolni. Ferdetengelyű vetületeknek elsősorban a pólusíves leképezések alkalmasak, mert a segédpólusba befutó fókhalózati vonalak törése vagy megszakadása semmiképp sem kívánatos. A póluspontosságnak – így a pólusívességnek is – szükséges feltétele, hogy a pólusban $\partial y / \partial \lambda = 0$. Ennek biztosítására módosítani kell az y egyenletet (CANTERS, 2002).

$$y = (v_{12}\varphi\lambda^2 + v_{32}\varphi^3\lambda^2 + v_{14}\varphi\lambda^4 + \dots) \cos \varphi + v_{10}\varphi + v_{30}\varphi^3 + v_{50}\varphi^5 + \dots \quad (\text{IV.54})$$

A szárazföldekre optimalizált pólusíves vetület már kellemes képet nyújt (IV.10.b. ábra). Ilyen sok (18) paraméternél különösen szabálytalan felületekre a simplex-eljárás nehezen – akár több óra alatt sem – találja meg egyszerre az optimális paramétereket és fókhalózat-elforgatást. A vetület előállításához alkalmazott megoldás az, hogy első lépésben egy azonos szakadásokkal rendelkező Csebisev-vetület* – jelen esetben az Eisenlohr-vetület – optimális elforgatásával

* Legkisebb torzulású szögtartó vetület.

az ábrázolt területet lehetőség szerint a térkép közepére hozom. Ehhez érdemes több kezdőértéket megpróbálni, mert bonyolult határvonal esetén az eljárás nem mindig konvergens. Ezt követően az elforgatást változatlanul hagyva megkeresem a legkedvezőbb vetületi együtthatókat. Az így kihozott paraméterkombináció már kellően közel áll a valóban optimálishoz, így ezt kezdőértéknek fölhasználva a paraméterek együttes optimalizálása is kivárható, kisebb a lokális minimumba futás veszélye.

A teljesség kedvéért megemlítem, hogy ugyanezen vetület normális elhelyezésű változata a Mars teljes felszínére optimalizálva a 105. oldalon, az V.11. ábrán látható.

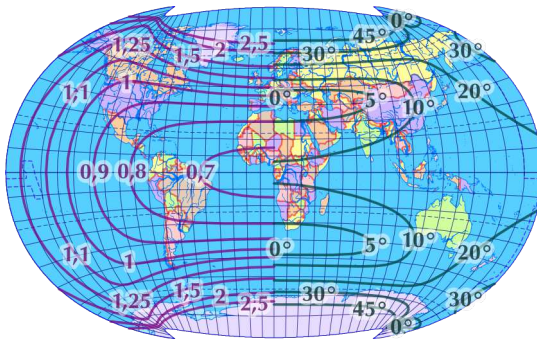
Nem célravezető a fenti eljárást az óceánokra alkalmazni, mert nem tudunk olyan fókálózat-elforgatást találni, hogy az ellenmeridiánon föllépő szakadás ne messen bele valamely óceánba. A koncentrikus képzetes síkvetületek előnyös tulajdonsága volt, hogy az ábrázolás csak egyetlen pontban szakad meg. Ha a paralelkörök képeinek kör alakját nem kívánjuk megőrizni, a kétszeres szimetriát azonban igen, akkor a sugárfüggvényt úgy kell módosítani, hogy az λ -ban periodikus legyen, azaz egy Fourier-sort adunk a (IV.26)-ban megadott ϱ -hoz:

$$\varrho^* = \varrho + r_{22}\beta^2 \sin(2\lambda) + r_{32}\beta^3 \sin(2\lambda) + r_{24}\beta^2 \sin(4\lambda) + \dots \quad (\text{IV.55})$$

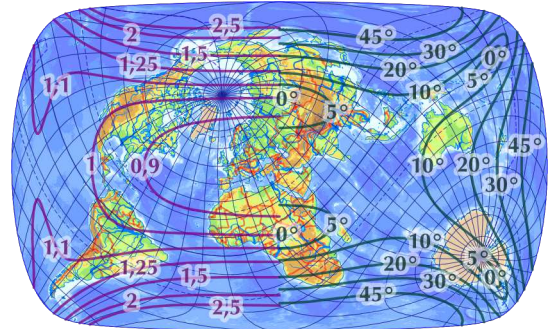
Tissot tételei miatt a pólus körüli végtelenül kicsi paralelkör képe nem lehet tetszőleges alakzat, csak ellipszis, ezért nem célszerű β -ban első fokú tagot is szerepeltetni. Jelen vetületi egyenletek azonban így megőrzik a szögtartást a pólusban, amely feltételt viszont elengedhetjük. Ezért a koordinátákat derékszögű koordináta-rendszerbe váltjuk, majd egy merőleges affinitást hajtunk végre:

$$x^* = \xi x \quad (\text{IV.56})$$

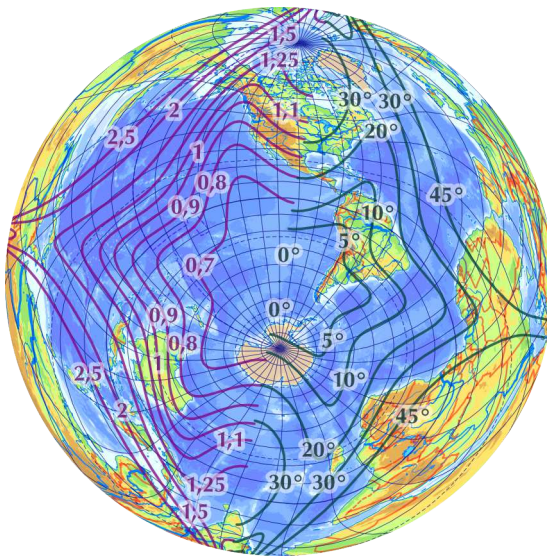
Az így megadott vetület a figyelembe vett tagok számától függően már tetszőleges torzulási jellemzőket föl tud venni. Az optimalizálási tapasztalatok szerint az ideális vetület közelítése Fourier-sorral nem kifejezetten hatékony, a szimplex-eljárás majdnem egy egész napon keresztül futott, mire megtalálta a IV.10.c. ábrán látható vetületet. Az izovonalak alakja igen szabadon követi



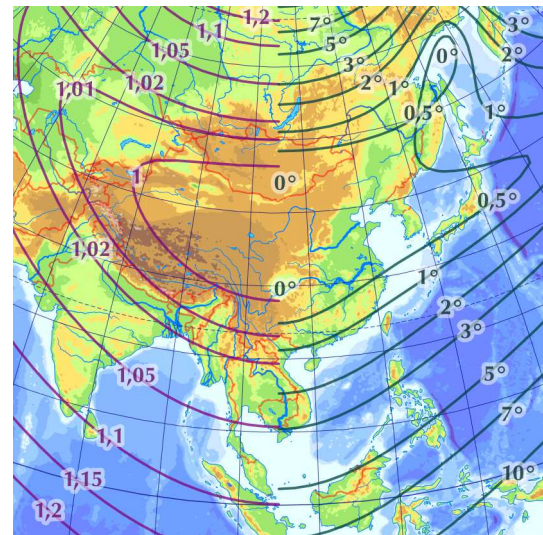
a) A teljes földfelszínre



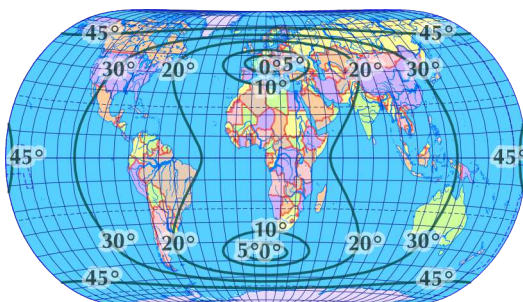
b) A szárazföldekre (pólusíves)



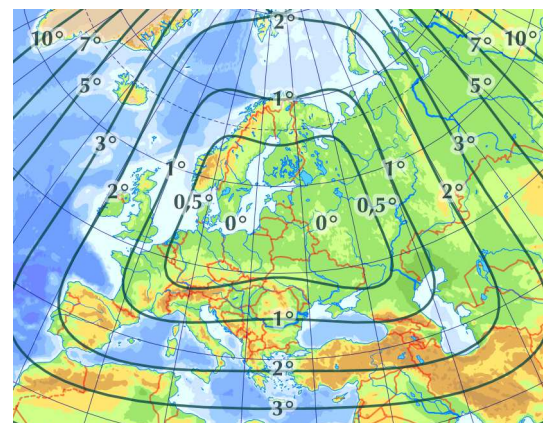
c) Az óceánokra (szakadásmentes)



d) Kelet-Ázsiára (polárkoordinátás)



e) A teljes földfelszínre (területtartó, pólusíves)



f) Európára (területtartó, polárkoordinátás)

IV.10. ábra. Legjobb vetületek közelítése

a Világóceán alakját, a leképezés feltehetően még messze van a valóban legjobb vetülettől. További kutatás témája lehet hatékonyabb közelítés kidolgozása.

Közepes és magas szélességek esetén a koncentrikus képzetes kúpvetületek sugárfüggvényének általánosításával is közelíthetjük az ideális vetületet. Ebben az esetben nincs szükség periodikusságra, hiszen az ellenmeridiánt nem ábrázoljuk (IV.10.d. ábra):

$$\varrho = r_{00} + r_{10}\beta + r_{20}\beta^2 + r_{02}\lambda^2 + r_{04}\lambda^4 + r_{12}\beta\lambda^2 + \dots \quad (\text{IV.57})$$

Pszeudopolikónikus vetületek sugárfüggvényét nem lehet ezen a módon általánosítani, mert akkor a rendszer alulkondicionálttá válik, több különböző paraméterkombináció lényegében azonos vetületet eredményez. A közelítés így nem volna hatékony.

Területtartó vetületeket általánosíthatunk úgy, hogy közben a területtartást megőrizzük. CANTERS (2002) kimutatta, hogy ha egy területtartó képzetes hengervetületet a következőképp átalakítunk:

$$x^* = \xi_1 x + \xi_3 x^3 + \xi_5 x^5 + \dots \quad (\text{IV.58.a}) \quad y^* = \frac{y}{\xi_1 + 3\xi_3 x^2 + 5\xi_5 x^4 + \dots} \quad (\text{IV.58.b})$$

akkor tetszőleges területtartó vetületet közelíteni tudunk. A pólusíves területtartó képzetes hengervetület átalakításának eredményeképp a IV.10.e. ábrán látható leképezés állt elő.

Canters ötletét általánosítottam az igazi képzetes kúpvetületekre. A területtartás megőrzése azt jelenti, hogy az elemi kis dT' képfelületi felületdarab egyezzen meg az átalakítás utáni dT^* felületdarabbal. Ez polárkoordinátákkal kifejezve:

$$\varrho \, d\gamma \, d\varrho = \varrho^* \, d\gamma^* \, d\varrho^* \quad (\text{IV.59})$$

Ha feltételezzük, hogy γ^* független ϱ -tól – amit megtehetünk, hiszen γ^* γ -n keresztül továbbra is tud függni mind a szélességtől, mind a hosszúságtól –, akkor a fenti azonosság a következő parciális differenciálegyenlet felírását teszi lehetővé:

$$\frac{\varrho^*}{\varrho} \frac{d\gamma^*}{d\gamma} \frac{\partial \varrho^*}{\partial \varrho} = 1 \quad (\text{IV.60})$$

A szeparábilis differenciálegyenletet ϱ^* -ra megoldva és γ^* -ot γ polinomjaként közelítve a következő egyenletek adódnak:*

$$\varrho^* = \frac{\varrho}{\sqrt{g_1 + 3g_3\gamma^2 + 5g_5\gamma^4 + \dots}} \quad (\text{IV.61.a}) \quad \gamma^* = g_1\gamma + g_3\gamma^3 + g_5\gamma^5 + \dots \quad (\text{IV.61.b})$$

Így előállított vetület látható a IV.10.f. ábrán. A vetület torzulásai nagyon kedvezők, néhány periférián található terület kivételével a legnagyobb szögmegváltozás 2° alatt maradt.

A fejezetben eddig csak érintőlegesen beszéltem a szögtartó leképezésekről. Ennek oka, hogy a szögtartó vetületek optimalizálásának nagy irodalma van a topokartográfia oldaláról (SNYDER, 1985; CANTERS, 2002; JUHÁSZ, 2008; TUTIĆ, 2009).

Ismeretes, hogy két *izometrikus* koordináta-rendszer között végzett leképezés szögtartó, ha teljesíti a *Cauchy–Riemann-differenciálegyenleteket*. Tudjuk azt is, hogy ezen differenciálegyenletek teljesülésének szükséges és elégséges feltétele, hogy a leképezés fölírható egy komplex változó holomorf függvényeként (LEE, 1976). Ez egyúttal azt is jelenti, hogy tetszőleges szögtartó vetület közelíthető egy másik szögtartó vetület komplex polinomos transzformációjával. Az előző bekezdésben hivatkozott tanulmányok mindegyike egymástól függetlenül és különböző területekre azt tapasztalta, hogy a ferdetengelyű sztereografikus vetület tekinthető kedvező kiindulási alapnak.

Fenti művek mind topográfiai térképek vetületeinek előállítását szolgálták, melyeknél nem volt feltétel a függőleges tengelyre vonatkozó szimmetria. A $w = y + ix$ jelölést bevezetve akkor lesz a szögtartó leképezés átalakítása továbbra is szimmetrikus, ha w -nek minden együtthatója valós szám. Az átalakításnál az első öt tagot vettem figyelembe:

$$y^* + ix^* = \psi_1 w + \psi_2 w^2 + \psi_3 w^3 + \psi_4 w^4 + \psi_5 w^5 + \dots \quad (\text{IV.62.a})$$

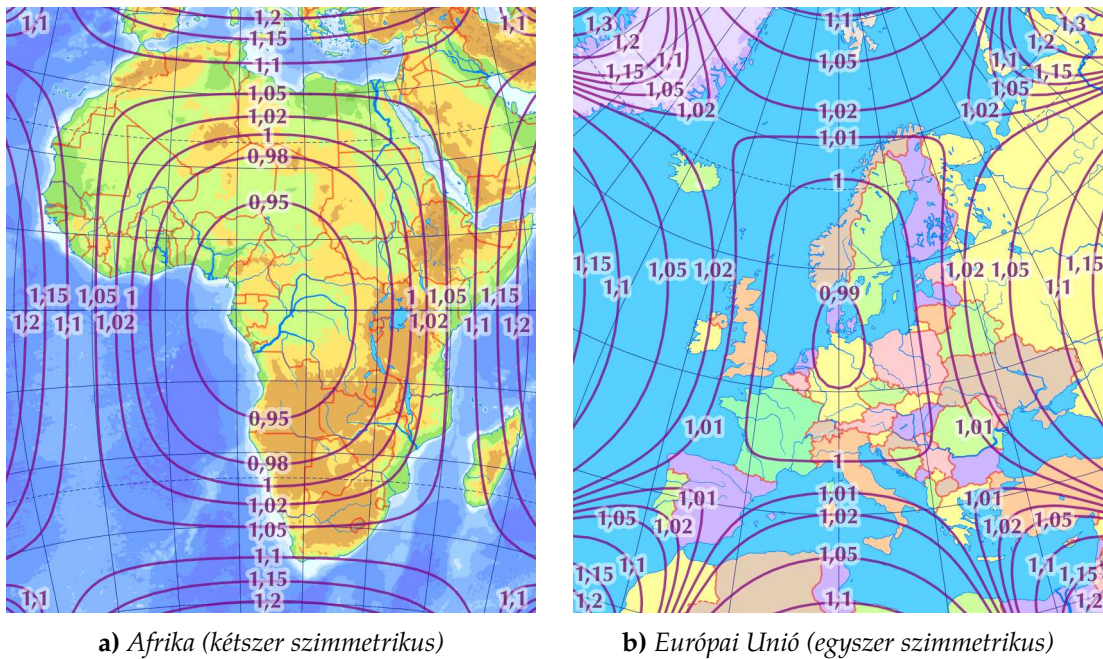
ahol

$$w = 2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} e^{i(\pi - \lambda)} \quad (\text{IV.62.b})$$

* A vetületi egyenletekben nem szerepel az integrációs konstans, holott ϱ^* helyett valójában $\sqrt{(\varrho^*)^2 + f(\gamma)}$ képletét kaptuk meg. Az egyszerűsítés oka, hogy nullától különböző $f(\gamma)$ -kra az eredményül kapott vetületben a tapasztalatok szerint elfogadhatatlan szingularitások jelentkeznek, ráadásul csak elenyésző javulást lehet elérni a torzulásokban.

A függőleges mellett a vízszintes tengelyre vonatkozó szimmetria igénye esetén w -nek csak a páratlan foksámú tagjait lehet figyelembe venni. A kétszer szimmetrikus változat Afrikára, az egyszer szimmetrikus változat az EU országaira a IV.11. ábrán látható.

Valamennyi, a fejezetben ábrán is szereplő vetület egyenletei és együttthatói a C. függelékben megtalálhatók.



IV.11. ábra. Átalakított sztereografikus vetületek

Ötödik fejezet

Kis méretarányú térképek megjelenítési problémái a térinformatikában

Miután egy adott területre ismert az optimális vetület, el lehet készíteni a terület kis torzulású térképét. Jelen fejezet célja az, hogy olyan algoritmusokat írjon le, melyek segítik tetszőleges vetületű térkép elkészítését digitális környezetben.

A modern kartográfiában a vetületeket digitális transzformáció segítségével alkalmazzuk. Ez azt jelenti, hogy a meglévő raszteres és vektoros adatsorok valamilyen módon köthetők a gömbi földrajzi koordinátákhoz. Az adatsorokat az ún. *koordináta-módszer* segítségével számítjuk át a kiválasztott vetület koordináta-rendszerébe.

Vektoros adatok esetén a módszer abból áll, hogy a GIS-alkalmazás a geometriák töréspontjait egyesével számítja át a vetületi síkra az összekötés sorrendjének megtartásával. Raszteres adatok esetén előre létre kell hozni egy célrasztert a vetületi síkon, majd a raszter minden egyes cellájára a számítógép kiszámítja annak ősképet a gömbön, végül az eredeti adatsorból interpolált értéket illeszt be.

Az alkalmazható vetületek listája a népszerű GIS-rendszerekbe előre meg van adva, a felhasználó nem tud saját vetületi egyenleteket hozzáadni. Hogy az előző fejezetben leírt vetületeket meg tudjam jeleníteni, megkíséreltem a nyílt forrású GIS vetületi motorját jelentő PROJ4 könyvtár átírását, hogy az támogasson bármilyen vetületi egyenlettel megadott egyéni leképezést. Bár a könyvtár kibővítése sikeres volt, a nyílt forrású GIS korlátai miatt ez mégis alkalmazhatatlannak bizonyult:

- a vektorok leképezését végző OGR-könyvtár nem lett felkészítve a vetületi szakadások kezelésére. A rendszer kimenete az [V.1.a.](#) fejezetben ismertetett okokból még az előre beégetett vetületek alkalmazásakor sem volt elfogadható minőségű (KERKOVITS, 2016);
- a raszterek átszámítását végző GDAL-könyvtár szintén alkalmazhatatlan volt.

A könyvtár fent leírt működéséhez szükségesek lettek volna az inverz vetületi

egyenletek, de a magas foksámú polinomokkal leírt optimális vetületek analitikusan nem invertálhatók, a nemlineáris egyenletrendszer numerikus megoldása pedig rendkívül számításigényesnek bizonyult. Ferdetengelyű elhelyezésben alkalmazott vetületeknél a pólusok és a 180. meridián igen tág – akár 30°-os – környezetében nem tudta végrehajtani a transzformációt még a legegyszerűbb vetületi egyenletek esetén sem.

Látható tehát, hogy a térinformatikában, de legalábbis annak nyílt forrású ágában a mai napig nem megoldott kérdés a korrekt vetületi transzformáció akkor, ha globális kiterjedésű adatsort akarunk leképezni. Az alábbiakban ismertetem, hogy milyen módon implementálható egy vetületi transzformációt végző program.

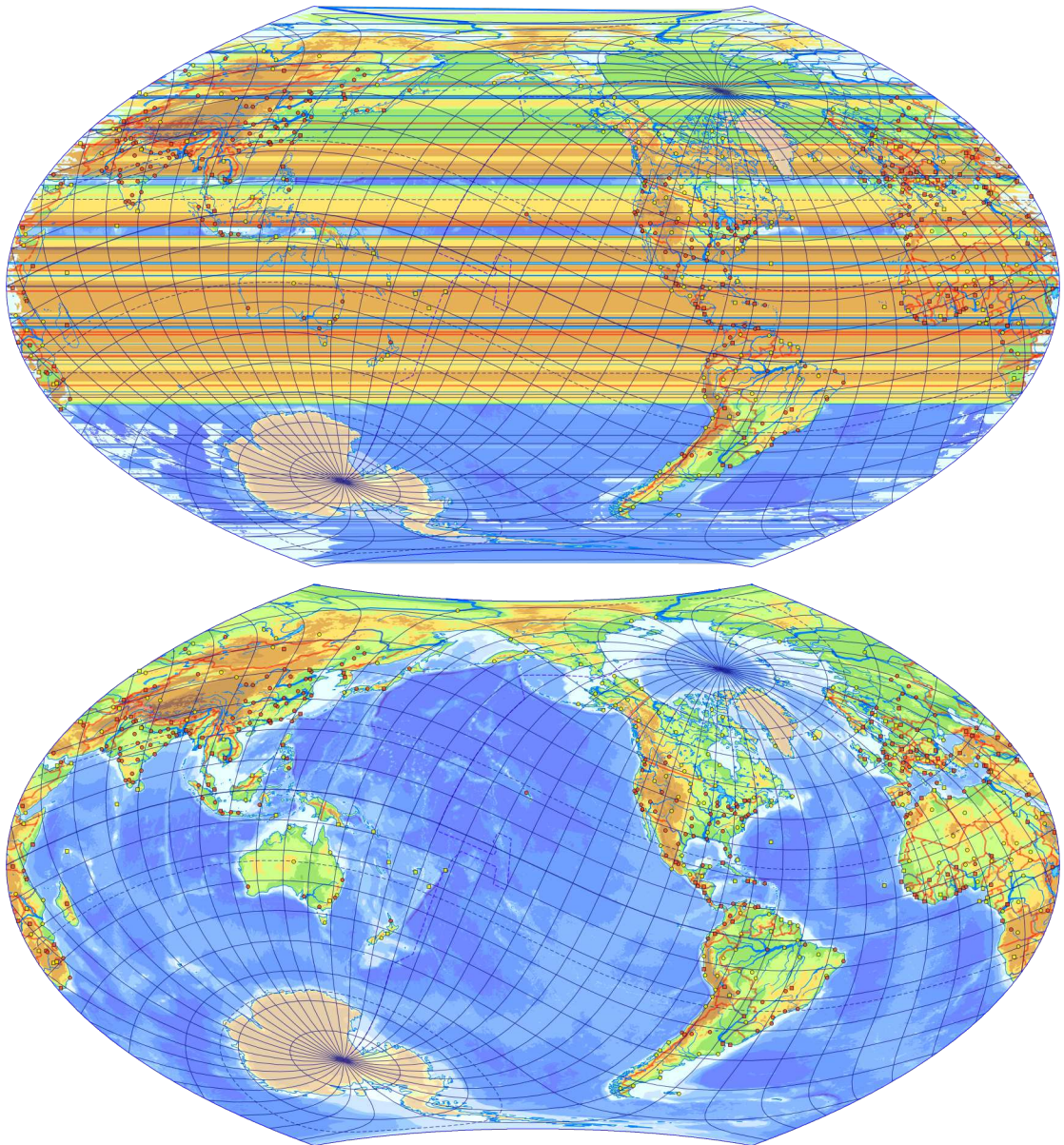
V.1. Térképi szakadások

V.1.a. Motiváció

Amikor a Földet síkba akarjuk fejteni, a térképünkön valahol biztosan föl fognak lépni szakadások. Sajnos a legtöbb geoinformációs rendszer ezt nem kezeli megfelelően. A GIS-termékek fő felhasználási területét képező nagy méretarányú térképek esetében nem jelentkezik a probléma, hiszen félgömbnél kisebb területek ábrázolásakor a szakadások jellemzően a térképtükrön kívül helyezkednek el.

Teljes Földet ábrázoló térképeken azonban a vetület alkalmazását követően a térképen megszakadó felületekből és kontúrvonalakból álló kesze-kusza, nehezen átlátható vonalhálózat alakulhat ki. Fokozottan jelentkezik a probléma, ha a vetületet transzverzális vagy ferdetengelyű elhelyezésben alkalmazzuk. Ez látható az [V.1.](#) ábrán, amelyen egy óceán-központú vetület figyelhető meg. A felső képen a leképezést az OGR-könyvtárban is alkalmazott algoritmussal hajtottam végre, vagyis a csomópontok összekötési sorrendje az alapfelületivel megegyező. A felületek összevissza töltődnek ki, a vonalak a pólusvonalat keresztezve kiszaladnak a térképtükrökből. Ez a megoldás kartográfiai célokra elfogadhatatlan.

A hagyományos módszer az, hogy az alapanyagokban vonalas és felületi elemeket a 180. meridián mentén előre kettévágják, és ilyen formában teszik elérhetővé. Ez azonban semmit nem old meg, sőt néha akár ronthat is, ha a vetület középmeridiánja nem Greenwich, vagy bármilyen más fókálózat-elforgatást alkalmazunk a leképezés előtt.



V.1. ábra. Szakadások figyelmen kívül hagyva (föül) és helyesen kezelve (alul) aszimmetrikus ferdetengelyű, átszámozott Aitoff-vetületben

Egy ilyen eljárás nem csak korográfiai térképeknél lehet szükséges: a szakadások bármilyen, teljes Földet ábrázoló tematikus térképen is jelentkeznek. A tematikus adatokat jellemzően geoinformatikai szoftverekkel generáljuk, így ezek esetén különösen nem garantálható, hogy állományunk tekintettel van a szakadásokra.

Amikor nekiláttam a feladatnak, meglepve tapasztaltam, hogy nem találtam az interneten más ilyen algoritmust. Egyetlen kivétel a JavaScript D3 könyvtára, mely kizárólag a megjelenítés oldaláról kezeli a kérdést, így a kimenet nem használható föl a D3 rendszerén kívül (SAKSHUWONG – ANGELI, [é. n.](#)). Én ezzel szemben –

bár ugyanúgy a JavaScript nyelvet használva – a kimenetben is geoinformatikai állományt nyertem, amely más GIS-alkalmazásokban is használható.

Természetesen egy ilyen mértékű átalakítás nem visszafordítható. Bár a topológiát törekedtem a lehető legteljesebb mértékben megőrizni – nem keletkeznek például önmetsző vonalak és átfedő gyűrűk –, a kimenetet már csak közvetlenül a térképi ábrázolás céljára érdemes tovább alkalmazni, adatelemzésre semmiképp.

A szakadások a legtöbb vetület normális elhelyezésében kitüntetett fókuszvonalai mentén lépnek fel. Ez jelentősen megkönnyíti a számítást, ezért az objektumok átalakítása előtt azokat a [x.](#) oldalon található képletetek segítségével a vetület segéd földrajzi-koordináta-rendszerébe forgattam. Hosszúság és szélesség alatt ebben a fejezetben mindig segédkoordinátákat értek.

V.1.b. A GeoJSON-formátum

Az alábbi eljárást a GeoJSON-formátumra dolgoztam ki, de természetesen alkalmazható más, hasonló formátumú állományokra is. A formátumválasztás oka, hogy az OPENLAYERS (2018) nevű alkalmazás, mely lehetővé teszi tetszőleges injektív vetület definiálását csupán a direkt és inverz vetületi egyenletek megadásával, ezt használja natív formátumként. Az eljárás során kis méretarányú, teljes Földet ábrázoló kimenetet feltételezek, hiszen kisebb részterületek ábrázolása során van lehetőség olyan vetületet választani, ahol a szakadások az ábrázolt területen kívül esnek.

A GeoJSON hatféle egyszerű geometriatípust ismer (BUTLER és mások, 2008):

- *Pont* (Point): kételemű tömbben megadott koordináták;
- *Ponthalmaz* (MultiPoint): pontokból álló tömb;
- *Vonal* (LineString): a töréspontokat az összekötés sorrendjében tartalmazó tömb;
- *Összetartozó vonalak* (MultiLineString): vonalakkal álló tömb;
- *Felület* (Polygon): vonalakkal álló tömb, melynek első eleme a külső körvonal, a többi elem a benne található lyukak (pl. szigetek a tóban, izovonalas térképen lokálisan eltérő értékek) körvonala; a körvonalak első és utolsó pontja mindig megegyezik;
- *Többrészes felület* (MultiPolygon): felületekből álló tömb.

A következőkben először ismertetem, hogyan kell eljárni különböző vetületfajták esetén; majd bemutatom az egyes geometriatípusok viselkedését a vetületi szakadások mentén.

V.1.c. Alkalmazás síkvetületeken

Bár elég ritka, hogy teljes Földet síkvetületben képezzünk le, bizonyos vetületek – pl. Lambert vagy Postel vetülete – alkalmasak a Föld minden pontjának ábrázolására. Példa lehet ferde tengelyű Postel-vetület alkalmazása egy kitüntetett ponttól mért távolságok szemléltetésére (REYES, 2012).

Az egész Föld ábrázolására alkalmas síkvetületek csak egyetlen pontban, a segédpólus ellenlábán szakadnak meg.

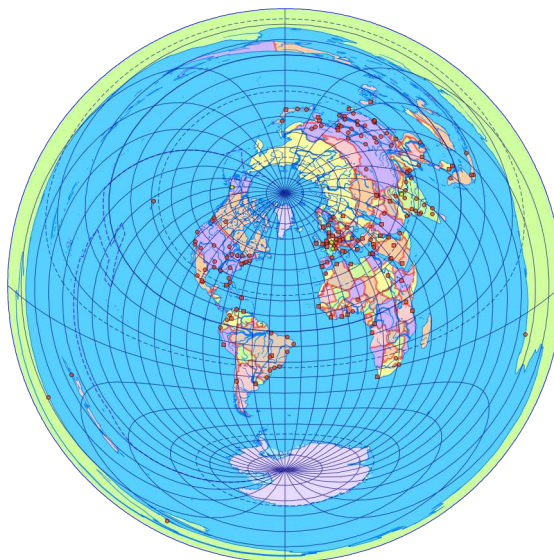
Ha egy vonal áthalad az ellenláb póluson, a leképezést követően a pólusvonal két különböző pontjáig kell futnia a vonalnak. Ha ezeket összekötnénk, akkor a pólusvonal két átellenes vége között keletkezik egy hosszú egyenes szakasz.

Egy vonalszakasz akkor halad át a póluson, ha egy töréspontja éppen a póluson található – ez esetben ez a pont eltávolítandó – vagy a szakasz két végpontjának hosszúságkülönbsége jó közelítéssel 180° . Érdekes minél magasabb szélességekhez egyre nagyobb toleranciát megadni, hiszen a segédkoordináták számítási pontossága errefelé jelentősen csökken.

Bár a földrajzi hosszúságnak a póluson nincs jelentősége, a pólusvonalas vetületek egyenletei más-más pontokra képzik le a pólus különböző hosszúsággal jellemzett pontját, mint ahogy az az V.3. ábrán látható. Szép eredményt tehát úgy lehet elérni, ha a vonalat kettévágjuk a pólusban, majd a pólusokra eső töréspontok hosszúságának a szomszédos töréspont hosszúságát adjuk meg.

Ha egy felület tartalmazza az ellenláb pontot, a vetítést követően egyben marad; ám a körvonalának nem a belső, hanem a külső oldalát kell kitölteni. Ezt a spagetti-topológiával rendelkező GeoJSON-formátumban lehetetlen megadni.* Az általam alkalmazott megoldás, hogy a pólusvonalat egy külső gyűrűként hozzáadom az érintett felülethez, az eredeti körvonal egy lyuk lesz, amint az az V.2. ábrán Ausztrálián is megfigyelhető.

* Elméletileg úgy kellene ilyen ábrázolni, hogy a szokásos óramutató járásával egyező helyett óramutató járásával ellentétes irányban soroljuk föl a töréspontokat, de a GeoJSON-t olvasó alkalmazások jellemzően ezt nem veszik figyelembe.



V.2. ábra. Ausztrália kitöltése Északi-Atlanti-óceán középpontú síkvetületen

A szakadások szempontjából külön csoportot alkotnak azok a perspektív síkvetületek, melyek vetítési középpontja a földgömbön kívül helyezkedik el. Ezekben a vetületekben nem ábrázolható ugyan a teljes Föld, de elforgatási transzformációkkal elérhetjük, hogy a nem ábrázolt terület az ábrázolás szempontjából lényegtelen legyen. Így a Föld legnagyobb része egyben ábrázolható.

A vetítési középpont helyének ismeretében kiszámolható az a φ_H segédszélesség, ahol az ábrázolás határa lesz. Jóllehet e szélességtől a déli segédpólus irányába eső területek nem ábrázolhatók, kartográfiailag elfogadható eredményt csak úgy tudtam elérni, hogy a határoló segédparalelkör mentén a felületeket kettévágtam. A vonalakat, felületeket ott szakítottam meg, ahol a két szomszédos csomópont a paralelkör által meghatározott két különböző gömbsüvegre esett.

V.1.d. Szakadások a nem osztott vetületeken

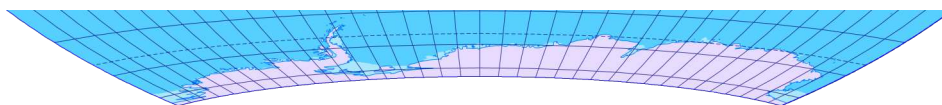
Az ellenmeridiánon a legtöbb vetület esetén számolnunk kell szakadással. A henger- és kúpvetületek, valamint a legtöbb képzetes vetület folytonossága nem teljesül itt.

Vonalak és felületek esetén azt kell figyelni, hogy a vizsgált két szomszédos töréspont metszi-e az ellenmeridiánt. Ez akkor következik be, amikor a két pont hosszúsága között legalább 180° különbség van.

Mivel a vetületi egyenletekbe való behelyettesítéskor a 180° és a -180° -os hosszúság a két átellenes szegélyre képződik le, fontos, hogy a kettétört vonalszakaszokról

megállapítsuk, a keleti vagy a nyugati féltekére esnek-e, és a metszéspont hosszúsági koordinátáját ennek megfelelő előjellel lássuk el. Ha ezt elmulasztanánk, akkor ugyanazt a kusza vonalhálózatot kapnánk vissza, mintha nem vágtuk volna el a vonalat.

A valódi henger- és kúpvetületek túlnyomó többsége, de még gyakran a képzetes vetületek is egy vonalra képzik le a pólust. A vonalas elemeknél például az ívelt pólusvonallal rendelkező vetületekben jelentkezik nem kívánatos összekötő szakaszok a térképkereten kívül.



V.3. ábra. Szakadás a pólusvonalon átszámozott Hammer-vetületben

Ha a síkvetületeknél alkalmazott eljárást alkalmazzuk a többi pólusvonalas vetületre is – ezúttal mindkét pólusban –, kielégítő eredményt kapunk. A végeredmény szempontjából a legtöbbször mindegy, hogy az ellenmeridián vagy a pólusvonal mentén végezzük el a vágást. Azonban a lyukak pontos elhelyezése a befoglaló négyszögek segítségével kevesebb hibalehetőséget rejt magában, ha előbb az ellenmeridiánon végezzük el a vágást.

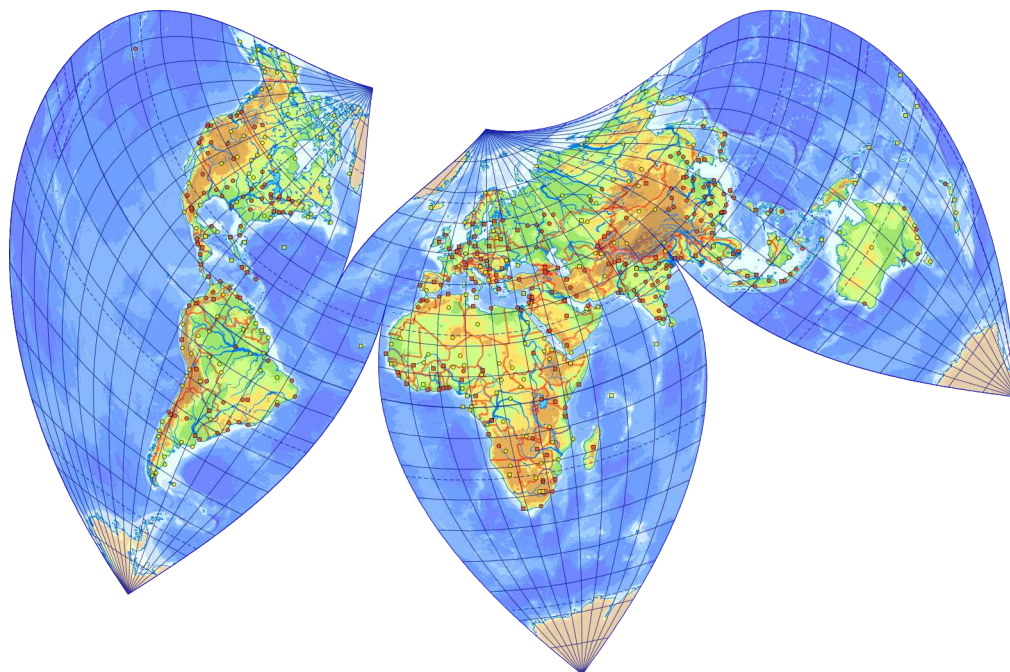
V.1.e. Osztott és oktaéder vetületek

A torzulások csökkentése érdekében egyes vetületeket osztott formában is alkalmazunk. Legismertebb ilyen Goode osztott vetülete, de magyar példával is találkozhatunk (MÁRTON, 2012). Nincs értelme ilyen vetületben normálistól eltérő elhelyezésnek. Ezen vetületek jellemzően kitüntetett meridiánok mentén szakadnak meg, és a szakadás csak egy adott szélességi körtől délre vagy északra jelentkezik.

Ennek megfelelően az alkalmazott megoldás az, hogy a hengervetületeknél tárgyalt módon vágjuk a geometriát. Azonban figyelni kell arra, hogy

- a számítások középmeridiánját mindig úgy kell megválasztani, hogy a hozzá tartozó ellenmeridián képződjön le a kép két végén;^{*}
- abból, hogy két szomszédos töréspont egy szakadó meridián két oldalán helyezkedik el, csak akkor következik, hogy meg is szakad, ha az ellenmeridián

^{*} Ez a szakadás fut tehát végig a teljes meridiánon.



V.4. ábra. Szakadások osztott Bonne-vetületben

- mentén már felvágtuk a geometriákat; ezért ezt a vágást kell mindig elsőként végezni, a többi sorrendje mindegy;
- az ellenmeridiánt kivéve a többi szakadás jellemzően nem fut végig a teljes meridiánon (V.4. ábra). Csak azokat a vonalszakaszokat kell szakítani, amelyek metszésponti szélessége a szakadás intervallumába esik;
 - egyes osztott vetületek csillag alakúak;^{*} ezekben nem kell az ellenmeridiánt a teljes meridiánon megszakítani;
 - az eljárás kizárólag *injektív* vetületekre alkalmazható. Nem injektív osztott vetületek[†] nem alkalmazhatók hagyományos GIS-rendszerekben.

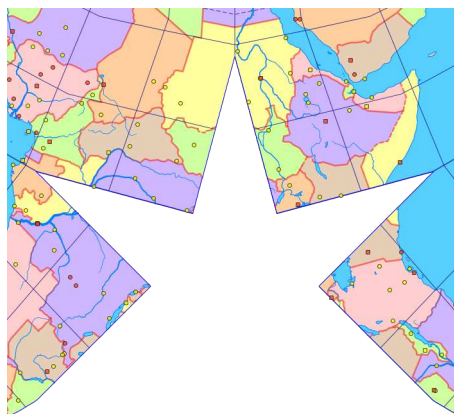
A geokartográfiában bonyolultságuk miatt igazi különlegességnek számítanak a poliéder vetületek. A képfelülettől függően ezek a vetületek bármilyen gömbi főkör mentén szakadhatnak, így a szakadó vonalszakaszok metszéspontjait számítani igen bonyolult. A poláris elhelyezésű oktaéder azonban speciális eset, hiszen a szakadások csak valamely meridián vagy az Egyenlítő mentén lépnek fel. Az ilyen térképeket megjelenésük miatt pillangó alakú vetületeknek is nevezik. Segédkoordináta-rendszer alkalmazásával bármilyen elhelyezésű oktaéder visszavezethető erre az esetre.

^{*} Jó példa erre a Berghaus vagy a William – Olsson-vetület.

[†] Ilyen például Baranyi osztott vetülete.

A meridiánok mentén fellépő szakadásokat ugyanúgy kell kezelni, mint az osztott vetületeknél.

Némely oktaéder vetületben bevágások keletkeznek az Egyenlítő mentén (V.5. ábra). Ha két szomszédos töréspont különböző féltekére esik, és az összekötő szakasz és az Egyenlítő metszéspontja a bevágáson található, meg kell szakítani a vonalakat és a felületeket a korábban ismertetett módon.



V.5. ábra. Bevágások Waterman vetületében. A Viktória-tó szigeteit a megfelelő körvonalhoz kellett adni

Jelen eljárás csak oktaéder képfelületnél működik. Nem használható, ha a szakadások nem kitüntetett segédfokhálózati vonalak, hanem tetszőleges gömbi főkörök mentén haladnak.*

Miután megállapítottuk, hogy milyen esetekben szükséges a vetületi szakadásokat figyelembe venni, tekintsük át, hogy a különböző geometriatípusokkal mit kell tenni, ha szakadást keresztez.

V.1.f. Pontszerű elemek a szakadáson

Ha egy pontszerű elem éppen a vetület szakadására esik, a koordinátáit érdemes egy kis értékkel eltolni a biztonság kedvéért. Egyébként más változtatást nem kell végrehajtani.

V.1.g. Töröttvonalak megszakítása

Ha észrevettük, hogy egy töröttvonal valahol keresztez egy szakadást, első lépésben meg kell határoznunk, pontosan hova is esik a metszéspont.

* Ilyen például Fuller Dymaxion-vetülete.

A két érintett töréspontra fektetett gömbi főkör és egy szakadó meridián metszéspontja polárgömbháromszögek felírásával és a gömbháromszögtani koszinusztétel többszöri alkalmazásával meghatározható.

Legyen a két töréspont koordinátája φ_A, λ_A és φ_B, λ_B . Ekkor távolságuk:

$$s = \arccos[\sin \varphi_A \sin \varphi_B + \cos \varphi_A \cos \varphi_B \cos(\lambda_B - \lambda_A)] \quad (\text{V.1})$$

A polárgömbháromszög B pontjánál lévő η szög az oldal-koszinusztételből:

$$\eta = \arccos \frac{\sin \varphi_A - \sin \varphi_B \cos s}{\cos \varphi_B \sin s} \quad (\text{V.2})$$

Innen a metszéspont φ_M szélessége a második alapformából számítható (λ_M a szakadó meridián hosszúsága):

$$\text{tg } \varphi_M \cos \varphi_B = \sin \varphi_B \cos(\lambda_M - \lambda_B) + |\sin(\lambda_M - \lambda_B)| \text{ctg } \eta \quad (\text{V.3})$$

Átrendezve:

$$\varphi_M = \arctg \frac{\sin \varphi_B \cos(\lambda_M - \lambda_B) + |\sin(\lambda_M - \lambda_B)| \text{ctg } \eta}{\cos \varphi_B} \quad (\text{V.4})$$

Ezek a képletek természetesen csak akkor használhatók, ha egyik töréspont sem esik a szakadó meridiánra, illetve a számítógép lebegőpontos számításának hibája miatt annak valamely szűk környezetébe. Ilyen esetben azonban nincs is értelme a számításnak, hiszen a metszéspont gyakorlatilag egybe fog esni ezzel a törésponttal. Ugyanígy nem szabad a képletet használni, ha valamely pont az egyik pólusra esik, ekkor értelemszerűen a metszéspont is a kérdéses pólusban lesz.

Ha a szakadás egy parallelkör mentén lép föl, kicsit nehezebb kezelni. A metszéspont hosszúságának direkt kiszámítása másodfokú trigonometrikus egyenlethez vezet két megoldással, ezt diszkutálni kell.

Legyen

$$\chi = \left| \text{tg } \frac{\lambda_M - \lambda_B}{2} \right| \quad (\text{V.5})$$

Ekkor az (V.3) egyenlet nullára rendezve és a félszögek összefüggéseit fölhasználva:

$$\text{tg } \varphi_M \cos \varphi_B - \sin \varphi_B \frac{1 - \chi^2}{\chi^2 + 1} - \frac{2\chi}{\chi^2 + 1} \text{ctg } \eta = 0 \quad (\text{V.6})$$

Közös nevezőre hozva és az azonos fokszámú tagokat összevonva, majd alkalmazva a másodfokú egyenlet megoldóképletét:

$$\chi = \frac{2 \operatorname{ctg} \eta \pm \sqrt{4 \operatorname{ctg}^2 \eta - 4(\cos \varphi_B \operatorname{tg} \varphi_M + \sin \varphi_B)(\cos \varphi_B \operatorname{tg} \varphi_M - \sin \varphi_B)}}{2(\cos \varphi_B \operatorname{tg} \varphi_M + \sin \varphi_B)} \quad (\text{V.7})$$

Visszahelyettesítve χ -t, a törtet kettővel egyszerűsítve és a $(\mu + \nu)(\mu - \nu) = \mu^2 - \nu^2$ összefüggést fölhasználva: (A képlet a φ_A , λ_A és φ_B , λ_B koordinátájú töréspontok közötti szakasz tetszőleges φ_M szélességi körrel való metszéspontjának λ_M hosszúságát számolja, η az (V.2) egyenletből számítható.)

$$\lambda_M = \lambda_B \pm 2 \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{ctg} \eta \pm \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \eta - \cos^2 \varphi_B \operatorname{tg}^2 \varphi_M + \sin^2 \varphi_B}}{\cos \varphi_B \operatorname{tg} \varphi_M + \sin \varphi_B} \quad (\text{V.8})$$

Általános esetben összesen négy megoldásunk van. Ebből jellemzően csak egyetlen helyes, a többi hamis gyök.* A gyökös kifejezés előtt álló \pm negatív, ha $\varphi_A > \varphi_B$, pozitív ha $\varphi_A < \varphi_B$. Az arctg előtt álló \pm előjele megegyezik $\sin(\lambda_A - \lambda_B)$ előjelével.

Ha $\exists m \in \mathbb{Z} : \lambda_A - \lambda_B \approx m\pi$, akkor a fenti képlet numerikusan instabil. Ilyenkor viszont a metszéspont jó közelítéssel vagy az A vagy a B pont meridiánján keresendő.

Szintén numerikusan instabil a képlet, ha $\varphi_B \approx -\varphi_M$. Ekkor azonban határérték-számítással igen jó becslést kapunk:

$$\lambda_M \approx \lambda_B \mp 2 \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \eta \sin \varphi_B) \quad (\text{V.9})$$

ahol \mp előjele ellentétes $\sin(\lambda_A - \lambda_B)$ előjelével.

A töröttvonalat ezek után kettévágjuk, a metszéspontot mindkét darabhoz hozzáadva. Fontos, hogy a kiszámolt metszéspontok éppen a szakadó vonalra esnek. Érdeemes tehát a kettévágás után a biztonság kedvéért a szakaszok végpontjait egy kis értékkel a szomszédos töréspont felé elmozdítani. Hogyha már eleve volt töréspont a szakadáson, a topológiai hibák elkerülésére az egyik fölösleges töréspont törlendő.

A metszésponttól és a metszéspontig tartó vonalszakaszokat összetartozó vonalakként kell a megjelenítő geoinformatikai alkalmazás felé átadni. Ezért, ha az

* Valójában elképzelhető a gömbön két olyan töréspont, amely a szakadó szélességi kör ugyanazon oldalán helyezkedik el, a köztük húzódó geodéziai vonal mégis kétszer keresztezi a szélességi kört. Tekintsük az ilyen esetet úgy, mintha egyetlen metszéspont sem lenne, mert ez nem csak bonyolult, hanem elhanyagolhatóan kis méretű részfelületek keletkeznek.

eredeti geometria egy egyszerű vonal volt, és m db szakadást találunk, akkor át kell alakítani egy $m + 1$ vonalat tartalmazó tömbbé. Ha már eleve több vonalat tartalmazó geometria volt, akkor viszont a tömbből az eredeti elem helyére $m + 1$ újat kell fölvenni.

A metszéspontot számoló képletek a rengeteg trigonometrikus függvény miatt észrevehetően lassítják a programot. Csak akkor érdemes ezeket végigszámolni, ha tényleg feltételezünk szakadást, egyébként nem szabad fölöslegesen minden töréspontra lefuttatni.

V.1.h. Felületek összekötése

A felületek esetén jóval bonyolultabb eljárásra van szükség. Ha a körvonalakat az előzőekben ismertetett módon földaraboljuk, már nem záródnak össze, így kitölthetők sem maradnak. Figyelembe kell vennünk azt is, hogy ha egy lyuk is megszakad, akkor annak körvonala a térképen a topológia szempontjából a külső körvonallalhoz adódik, mintegy „behorpadásként”. Ilyen a felső lyuk az V.6. ábrán.

A felületek gyűrűinek körüljárási iránya a GeoJSON-ben nincs definiálva. Mivel a véges gömbfelületen nem triviális, hogy a körvonal melyik oldala a kitöltött, a következő eljárást használok: Először kiszámolom a gyűrű előjeles területét. A pontos érték számítása rendkívül számításigényes, de közelítő értéket egyszerű szummával megkaphatunk (CHAMBERLAIN – DUQUETTE, 2007):

$$T \approx \frac{1}{2} \sum_i \Delta\lambda \sin \varphi_i \quad (\text{V.10})$$

ahol φ_i az adott csomópont szélessége, $\Delta\lambda$ pedig az $i + 1$ -edik és az $i - 1$ -edik csomópont hosszúságának különbsége radiánban. Ez általában $\Delta\lambda = \lambda_{i+1} - \lambda_{i-1}$, de ha ennek abszolútértéke nagyobb, mint π , akkor az ellenmeridián keresztesztését figyelembe véve $\Delta\lambda = \pm 2\pi - (\lambda_{i+1} - \lambda_{i-1})$, \pm előjelét úgy megválasztva, hogy $|\Delta\lambda| < \pi$.

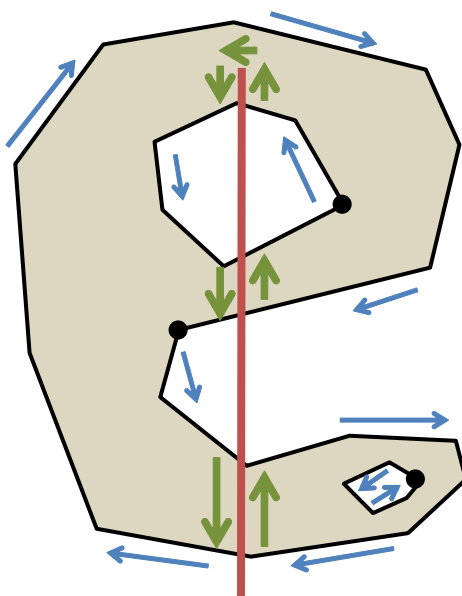
Az eljárás a félgömb felszínével kevesebbet vagy többet ad eredményül, ha a körvonal valamely pólust tartalmazza. Ha a $\Delta\lambda$ -k előjeles összegének abszolútértéke a 180° -ot meghaladja, akkor a korrigált terület:

$$T' = T \pm 2\pi \quad (\text{V.11})$$

ahol a \pm egyértelmű, ha feltételezzük, hogy a felület a félgömbnél nem nagyobb ($|T'| < 2\pi$). Bár nem valószínű, hogy egy felület mindkét pólust tartalmazza, de ez

esetben $|T| > 2\pi$. A teljes gömb felszínének (4π) hozzáadásával vagy kivonásával tudjuk az eredményt korrigálni.

Az így számolt terület előjele pozitív, ha a körüljárási irány az óra járása szerinti; negatív, ha ellentétes. A legnagyobb abszolútértékű terület a külső gyűrűhöz tartozik. Ennek figyelembevételével, és a körvonalak szükség szerinti megfordításával elérhető, hogy a külső gyűrűk egységesen óra járása szerint, a belső gyűrűk – lyukak – az óra járásával ellentétesen legyenek megadva. (Kék nyilak az ábrán.) Ez jelentős egyszerűsítéseket jelent majd a továbbiakban.



V.6. ábra. Felületek megszakítása

Miután a körüljárási irány egységes lett, megszakítom a külső körvonalat. Ha volt szakadás, az első és utolsó vonalszakaszt biztosan összeköthetem, mert az első és utolsó pont ebben a formátumban mindig megegyezik. (Az ábrán fekete körökkel jelölve.) Ha a külső körvonal megszakadt, van értelme vizsgálni a lyukakat is. Ha egy lyuk nem szakad, az új alakzatban is lyuk lesz. (Az ábrán az alsó lyuk így kezelendő.) Ha szakadt, a külső körvonalhoz hasonlóan a két végpontban összekötöm, a nem záródó szakaszokat egy tömbben eltárolom. Az összegyűlt nem záródó szakaszokat ezután sorba rendezem a végpontok és a kezdőpontok szerint külön-külön a szakadó vonal körül az óra járásával ellentétes irányban.

Az összekötést minden szakaszvégponttól a soron következő kezdőpontig rendre végre kell hajtani, gondosan ügyelve, hogy mindvégig az óra járásával ellentétesen haladjunk – a szakadás a bal oldalon legyen, mint az ábra zöld nyilai mentén. Az

egységes körüljárási irány miatt ez garantálja, hogy ami eddig a felület belső oldala volt, ezután is az marad. Az ellenmeridiánon külön oda kell figyelni, hogy az óra járásával ellentétes sorba rendezési irányt a gömbön kövessük!*

Mivel több vetületben a szakadó vonalak képe nem egyenes vonal, így további töréspontok beszúrásával követni kell annak görbületét. Tapasztalataim szerint kis méretarányú térképek készítéséhez bőven elegendő fokenként vagy fél fokenként rajzolni a sűrítőpontokat. Legyen egy szakadó meridiánon két metszéspont szélessége φ_A és φ_B , a töréspontok általunk megkövetelt távolsága t , mindhárom fokban kifejezve. Legyen $\langle X \rangle$ pedig X matematikai szabályok szerint egészre kerekített értéke. A sűrítő pontok száma ekkor:

$$m = \left\lfloor \frac{|\varphi_A^\circ - \varphi_B^\circ|}{t^\circ} \right\rfloor - 1 \quad (\text{V.12})$$

Az i -edik sűrítő pont φ_i szélessége (fokban):

$$\varphi_i^\circ = \varphi_A^\circ + \frac{(\varphi_B^\circ - \varphi_A^\circ)i}{m+1} \quad (\text{V.13})$$

Parallelkörök esetén ugyanígy kell eljárni, csak akkor szélesség helyett hosszúsági koordinátákat kell a képletbe helyettesíteni.

Ha a két összekötendő szakasz a szakadás két ellentétes oldalán található, bevágás keletkezik. (Lásd az V.6. ábra tetején!) Az összekötést úgy kell végrehajtani, hogy a szakadást az óra járásával ellentétesen – jobbról – kerülve sűrítőpontokat helyezek el a szakadó vonal végpontjáig, áttérek a szakadás túloldalára, és ott folytatom a sűrítő pontok hozzáadását.

Szerencsés esetben a két szomszédos metszéspont ugyanahhoz a vonaldarabkához tartozik. (Például az ábra jobb alsó sarkában.) Ekkor a felületet bezárjuk. Ha egy másik vonalszakaszba futott bele az eljárás, akkor csak részeredmény keletkezett. Frissíteni kell a bezárandó szakaszok tömbjét, hiszen már kettővel kevesebb szabad végpont van. Belátható, hogy az eljárás folytatásával előbb-utóbb minden vonalszakasz bezáródik.

Miután megvannak a külső körvonalak, hozzáadjuk a lyukakat. Minden lyukat abba a körvonalba kell berajzolni, amelyiknek befoglaló négyszöge teljes egészében tartalmazza a lyuk befoglaló négyszögét (V.5. ábra).

* Keleti féltekén északi, a nyugati féltekén déli irányban haladva kell sorban összekötni. Ez a vetület síkjában megfordul, és ott óra járásával egyezővé válik.

Ha eredetileg egyszerű felületünk volt, és a szakadást követően már több külső körvonalunk van, akkor át kell állítanunk a geometria típusát többrészes felületre.

V.1.i. Implementálás

Fenti eljárásokat OpenLayers-bővítményként implementáltam (KERKOVITS, 2016). Ez lehetőséget biztosít a korábban ismertetett vetülettípusok szakadásait megfelelően kezelni. Az eljárás kimenete GeoJSON-formátumba menthető, melyet a legtöbb GIS-rendszer olvasni képes. Jelen disszertációban szereplő ábrák szinte kivétel nélkül ezzel a programmal készültek.

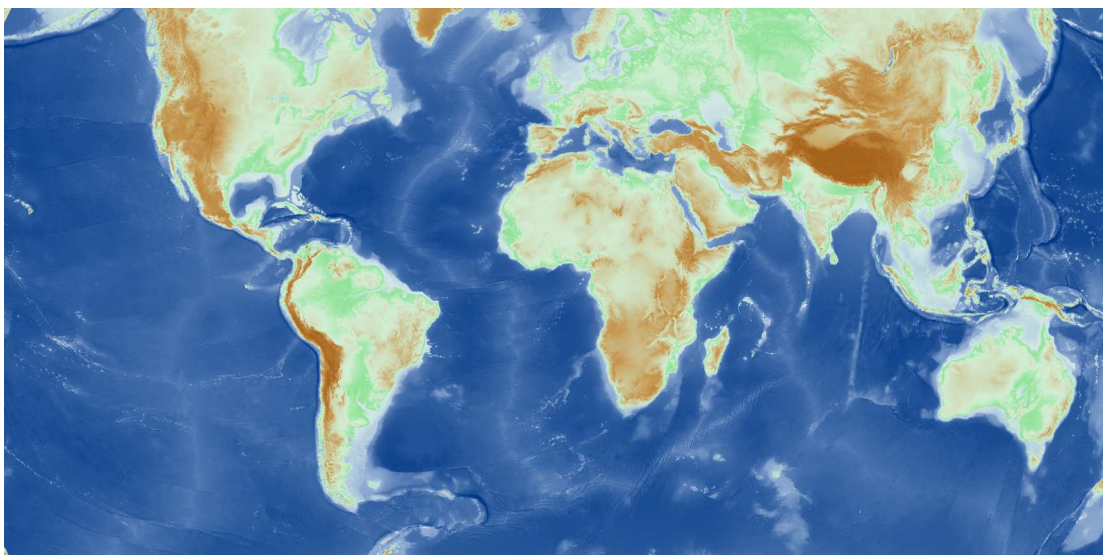
V.2. Raszteres állományok

V.2.a. Leképezés nyílt forrású programokkal

A globális kiterjedésű raszteres állományok értelmezése az általam vizsgált szoftvercsomagokban igen gyenge minőségű. Az alapfelületi koordinátákat a GRASS nem síkkoordinátaként kezeli, így korrekt mérések végezhetők. Ugyanakkor a GRASS nem tud vetületi transzformációt végrehajtani.

A másik elterjedt nyílt forrású rendszer, a QGIS, a GDAL-könyvtárat használja a raszteres állományok leképezéséhez. A GDAL rengeteg vetületet ismer; a vetületek korlátozott mértékben, de testreszabhatók PROJ4-formátumban. Meg kell ugyanakkor állapítani, hogy globális adatsorok leképezésére a GDAL alkalmazása kevés sikerrel kecsegtet:

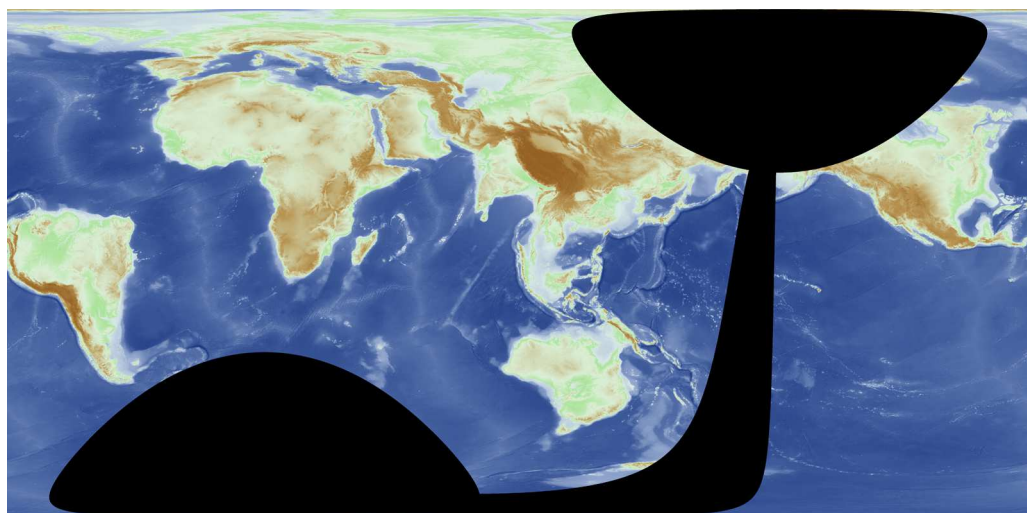
- a könyvtár inverz vetületi egyenleteket is használ a leképezéshez, melyek a globális használatra alkalmasabb képzetes vetületeknél nem mindig állnak rendelkezésre; ha az inverz vetületi egyenlet nincs implementálva, a GDAL hibaüzenettel leáll;
- a globális vetületek kontúrvonala csak a legritkább esetben téglalap. A GDAL erre nincs felkészülve, a célraszter méretét az ellipszis kontúrú vetületeknél túl szűkre szabja, a térkép széleit jelentős adatvesztés mellett levágja (V.7. ábra);
- a PROJ4 bár rengeteg leképezés egyenletét ismeri, de arra nincs lehetőség, hogy a felhasználó maga gépeljen be vetületi egyenleteket, így a felhasználható leképezések száma mégis korlátozott;



V.7. ábra. A GDAL-könyvtár levágta a domborzatmodell jelentős részét Van der Grinten I. vetületében

- a GDAL az alapfelületi koordinátákat is síkkoordinátáknak fogja föl, így a 180° -os meridián és a pólusok környékén nem tud a szomszédos pixelek között interpolálni;
- bár elméletileg van lehetőség fokhálózat-elforgatásra, az eredmény még a legegyszerűbb négyzetes hengervetület esetén sem kielégítő (V.8. ábra); a pólus környéki adatok a leképezés során elvesznek, a veszteség bizonyos esetekben akár félgömbnél nagyobb területre is kiterjedhet.

A fizetős alkalmazásokban a vetületek előre magadott listájából választhatunk, melyek így nem alkalmasak az előző fejezetben ismertetett optimális torzulású



V.8. ábra. A GDAL-könyvtár hibásan képezte le az eredetileg globális domborzatmodellt ferdetengelyű négyzetes hengervetületbe

vetületek alkalmazására. Ezért fizetős szoftvereket a kutatás során nem vizsgáltam.

A GDAL esetén lehetőség van a forráskód megváltoztatására és így új vetületek implementálására. Kísérleti jelleggel implementáltam C nyelven egy olyan egyéni vetületet, mely paraméterként vetületi egyenletet várt. A program a megadott vetületi egyenletet futtatható kóddá fordította, inverzét kétdimenziós Newton – Raphson-módszerrel (ÍPBÜKER – BILDIRICI, 2002) közelítette. Bár az implementálás sikeres volt, a bizonytalanul konvergáló és csak közelítő eredményt adó Newton – Raphson-módszer tovább erősítette a GDAL fent ismertetett hibáit, így az eredmény teljesen használhatatlan lett. Ezért tartottam szükségesnek saját leképező eljárás megírását, hogy az általam kidolgozott vetületekbe raszteres adatokat is képezhessek.

V.2.b. A raszteres adatok leképezésének elve

A raszteres adatok leképezése történhet *inverz* és *direkt* módszerrel (BÖHM, é. n.). A hagyományos, inverz módszer a következőképp történik:

1. Létrehozunk egy üres rasztert a vetületi síkon. A raszter méretének automatikus meghatározásához szükséges a kiindulási raszter kiterjedésének ismerete, melyet direkt vetületi egyenletek segítségével számolhatunk át a vetületi síkba.
2. Az új üres raszter pixeleiről egyesével megállapítjuk, hogy mely alapfelületi koordinátákhoz tartoznak. Ehhez inverz vetületi egyenletek szükségesek. Mivel a vizsgált pont ősképeire általában nem esik adatpont az eredeti raszterben, valamilyen interpolációs eljárást kell alkalmazni a végső pixelérték megállapításához.

Fenti módszer vitathatatlan előnye, hogy igen egyszerű, de a 2. pont globális adatsor esetén problémákhoz vezet. Bár valamilyen közelítő eljárással bármely leképezés invertálható, ezek az iterációs eljárások számításigényesek és instabilak. Az inverz vetületi egyenleteket több millió alkalommal kell végigszámolni, így ha a vetület analitikusan nem invertálható,* a számítás rendkívül hosszadalmas

* A GIS-alkalmazásokat jellemzően lokális adatsorok elemzésére használjuk, melyhez a topográfiai térképek vetületei tökéletesen megfelelnek. Ezeket a vetületeket mindig az inverz képletekkel együtt szokás megadni, ezért ez a probléma nem jelentkezik. A földrajzi térképek vetületeinek viszont nem mindig létezik szokásos függvények segítségével kifejezhető inverze. Ilyen például Winkel III. vetülete.

(JENNY – ŠAVRIČ – LIEM, 2016), a GDAL igen gyakran végtelen ciklusba fut. Nehézség továbbá a szükséges interpolációt a 180° -os hosszúság és a pólusok közelében implementálni, ahol a gömbi és síkbeli koordináták viselkedése jelentősen eltér egymástól. A GDAL implementációjában ennek megfelelő kezelése például teljesen hiányzik is.

A direkt módszer ezzel szemben nem használ inverz vetületi egyenleteket:

1. A kiindulási raszter minden egyes pontjáról megállapítjuk, hogy milyen síkkoordinátára fognak esni. Ehhez csak a direkt vetületi egyenletek szükségesek.
2. Létrehozunk egy célrasztert, mely tartalmazza a leképezett területet.
3. A célraszter minden egyes pontjának interpoláció segítségével értéket adunk.

A módszer első ránézésre számításigényesebbnek tűnik, hiszen nem csak a célraszter, hanem a forrásraszter minden pontján is végig kell iterálni. Ráadásul, mivel az eredeti adatsorunk a vetületi síkban már nem szabályos rácshálóként van jelen, a hagyományos interpolációs eljárások – mint például a kétköbös – nem mindig alkalmazhatók, szabálytalan pontfelhőre kifejlesztett módszerek – például az alább ismertetett IDW – szükségesek. Ennek megfelelően abban az esetben, ha az inverz vetületi egyenletek rendelkezésre álltak, a direkt módszer futásideje az inverz módszerének hatszorosa volt, de a vetületek jó részét csak ezzel az eljárással sikerült alkalmaznom.

Bár Jennyék fentieket felismerve szintén használtak direkt vetületi egyenleteket eljárásukban, az ő megoldásuk célja a gyorsaság és nem a geometriai pontosság volt, ezért az általuk rajzolt kimenet nyomdai célokra alkalmatlan adatsűrűségű; továbbá az ő eljárásuk vetület kontúrvonalainál továbbra is igényel inverz vetületi egyenleteket.

V.2.c. A munka során használt algoritmusok

Mivel az előző fejezetben ismertetett optimális torzulású vetületek magas fokszámú polinomok vagy transzcendens kifejezések, ezek analitikus invertálása nem lehetséges. Ez egyértelművé tette, hogy a leképezéshez a direkt módszert kell választani. A módszer hátránya, hogy nagy memóriaigényű, hiszen a kiindulási raszter mellett minden egyes raszterpont x, y vetületi koordinátáit is tárolni kell. A túlzott helyigény csökkentése érdekében a JavaScript tömb adattípusa helyett bináris puffereket kellett használni. E nélkül egy pár megapixeles kép vetítése

is több gigabájt memóriát igényelne. A koordináták Float32 számábrázolással szerepelnek a memóriában.

A vetületi síkon az egyszerűen használható, és kellő mennyiségű adatpont esetén hatékonyan működő *IDW-interpolációt* (SHEPARD, 1968) alkalmaztam. E szerint az x, y interpolált pont q értéke az x_i, y_i koordinátájú q_i értékű adatpontokból:

$$q = \frac{\sum_i \left[\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \right]^{-W} q_i}{\sum_i \left[\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \right]^{-W}} \quad (\text{V.14})$$

ahol $W \geq 1$ a módszer viselkedését szabályozó skalár. Hogy a távoli pontok ne befolyásolják túlzottan az értéket, $W = 3$ értéket választottam.

Egy raszteres adatsor leképezésénél több millió adatpontunk van, ezekre a fenti szummák kiszámítása – különösen az abban szereplő négyzetgyök miatt – mérhetetlenül számításigényes volna, hiszen a forrás- és célraszter minden pontja között billió nagyságrendben kellene távolságokat számítani. Ezért, és mivel a távoli adatpontok kevésbé befolyásolják az eredményt, csak a 8 legközelebb eső adatpontra számítottam a fenti kifejezést.

A 8 legközelebbi szomszéd hatékony megkeresése kihívást jelent egy ekkora adathalmazból. Szükséges valamilyen térbeli indexelés alkalmazása. A vetületi síkon egyedi UInt32 típusú azonosítóval ellátott négyzeteket jelöltem ki, melynek optimális mérete tapasztalataim szerint 2×2 pixel. Minden négyzethez UInt32 pufferekbe eltároltam, hogy melyik adatpontok találhatók benne. A hatékony adatszerkezet cseppet sem triviális megoldását MEJ, Hszü N. és Hszü L. (2016) cikkéből vettem. A számított pontot tartalmazó négyzetből az előbbi cikkben ismertetett csigavonal mentén körbejárva, legfeljebb 50 pixel távolságig kerestem a 8 legközelebbi pontot. A csigavonalat továbbfejlesztettem abban az értelemben, hogy annak körüljárási iránya függjön attól, hogy a vizsgált pont a rács melyik negyedébe esik.

A globális vetületek kontúrvonala csak a legritkább esetben írható le egyszerű alakzatként. A raszteres adattárolás természeténél fogva téglalap alakú területekre alkalmazható. Szükséges tehát a vetület kontúrvonalán kívüli területre *nincs adat* értékek írása, a számításigény csökkentése érdekében ezekre a pontokra nem szabad megkísérelni az interpolációt. Az alkalmazott megoldás az, hogy az eredeti

raszteres adatsor körvonalát a szakadások figyelembe vétele mellett vektorként a képfelületre képezem, majd a létrejövő sokszöget raszterizálom a célraszterrel egyező felbontásban. Ehhez a HTML5 canvas technológiát használtam. Az így keletkezett rasztert maszkként használva megállapítható, hogy mely pontokra érdemes az interpolációt lefuttatni.

A célraszter optimális felbontásának megállapítása is nehézségekbe ütközött. Egyfelől törekedni kell arra, hogy a pixelméret a vetület egységnyi méretarányában ugyanakkora területet fedjen le, mint elméletileg az alapfelületen. Ez a törekvés különösen a szögtartó vetületeken nem kivitelezhető, hiszen a jelentős területnövekedés miatt sokszorosra emelkedne a pixelek száma hamis képet sugallva a valódi adatsűrűségről. Ezért ha a raszter képének területében a program jelentős növekedést észlel, a pixelméretet úgy állítja be, hogy nagyjából azonos számú pixel legyen a kiindulási és az eredményraszterben. Bármilyen felbontást állítunk be, valamennyi információveszteség a raszteres adatsorok leképezésénél szükségszerűen föllép (STEINWAND – HUTCHINSON – SNYDER, 1995), a cél csak ennek egyensúlyban tartása.

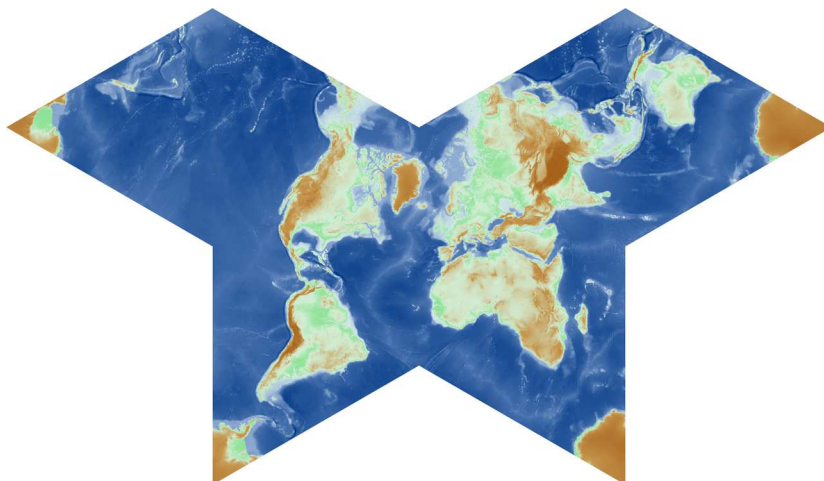
Hasonló szempontból okoztak problémát azok a jellemzően szögtartó vetületek, amelyek a Föld valamely pontját vagy vonalát a végtelenbe képezik le. Ebben az esetben a célraszter által lefedett területet körbe kell vágni egy önkényesen választott távolságnál.

V.2.d. Megvalósítás

A fenti eljárást JavaScript nyelven implementáltam. Mivel a munka célja egy ilyen elven működő program megvalósíthatóságának bemutatása, nem törekedtem minden szóba jöhető raszteres adatformátum támogatására. Kizárólag két, a földrajzi térképek esetén gyakran előforduló feladatra koncentráltam.

A szoftver képes alapfelületi domborzatmodellek beolvasására és azok leképezésére (V.9. ábra). A modellt Int16 típusú, little endian, egysávos ESRI BIL-formátumban kell megadni. Globális alkalmazásra a formátum által biztosított méteres magassági pontosság tökéletesen megfelelő, a formátumot a vezető GIS-csomagok mindegyike ismeri.

Másik használható formátum az RGB-kép, mellyel például űrfotómozaikokat képezhetünk síkba. Használható bármely, a böngésző által ismert formátum, de a



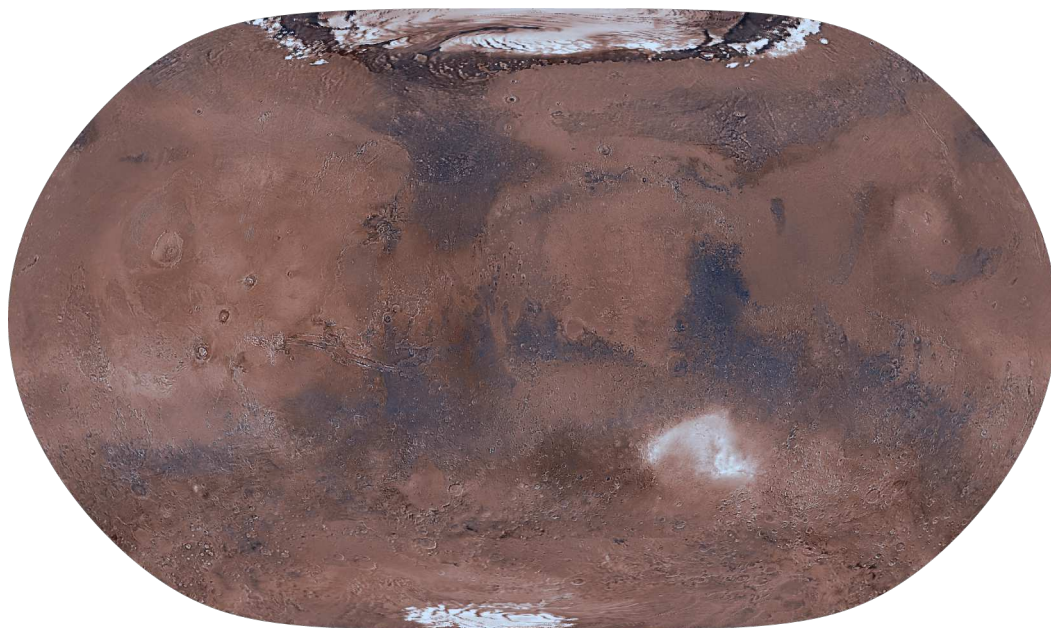
V.9. ábra. Domborzatmodell szögtartó Cahill-vetületbe képezve

kimenet minden esetben PNG. Mivel a böngészők jellemzően nem ismerik föl a TIFF-állományokat, a georeferencia megadására kizárólag Worldfile segítségével van lehetőség, melyet valamennyi népszerű GIS-alkalmazás a felhasználó kérésére ki tud írni. A *nincs adat* értékek átlátszó képpontok lesznek. A korábban ismertetett maszkolási technika hasznos mellékhatása, hogy a böngésző alapértelmezett, ún. subpixel rendering üzemmódjában a maszk határvonalán különböző átlátszósági értékek lesznek, melyek a célrasterre másolva finom vonalfutás érzetét keltik (V.10. ábra). Ez megoldást jelent JENNY, ŠAVRIČ és LIEM (2016) cikkében fölvetett problémára.

A tapasztalatok szerint sikerült a GDAL-hoz képest igényesebb kimenetet előállítani. Megoldottam a szakadásokat tartalmazó bonyolult vetületek esetén is



V.10. ábra. Bonyolult kontúrvonalú Raisz-vetületbe helyezett raszteres adatbázis. A térkép széle az élsimítás miatt nem pixeles



V.11. ábra. *A Mars legjobb pólusíves vetülete*

az egységes interpolációt, az adatvesztéséget minimálisra redukáltam, a görbe kontúrú vetületek határvonala a lehetőségekhez képest esztétikusan jelenik meg a kimeneten. Az eljárás segítségével az optimális vetületek nem csak a Föld, hanem más égitest esetén is megjeleníthetők (V.11. ábra).

Az eljárásnak természetesen hátrányai is vannak, ezek közül a legfontosabb az extrém memóriahasználat. Egy nyolc megapixeles RGB-kép leképezése során a trükkös adattárolás ellenére is kb. fél gigabájt RAM-ra van szükség, mely a kép méretével közel egyenes arányban növekszik. Ez lehetetlenné teszi komolyabb méretű raszterek leképezését a rendelkezésre álló technikai feltételek mellett. Nyomdai minőségre alkalmas 300 dpi felbontás mellett legfeljebb A/2-es méretben készíthetünk raszteres alapanyagot a tanszéken elérhető, négy gigabájt RAM-mal rendelkező számítógép segítségével.

A futásidő nagy részét az IDW-algoritmus tölti ki, ezért továbbfejlesztési lehetőség, hogy legalább ezt az algoritmust a CPU helyett a párhuzamos számításra alkalmas GPU futtassa (MEJ – Hszü N. – Hszü L., 2016), így a futásidő a harmadára csökkenhetne. Ebből a szempontból ígéretes, hogy már létezik olyan fordítóprogram, mely JavaScriptből GPU-ra alkalmas gépi kódot fordít (SAPUAN és mások, 2016).

V.3. Leképező program írása

Azért, hogy az előbb leírt algoritmusokat alkalmazni tudjam egy térkép megrajzolásához, kiegészítettem a [III.3.](#) fejezetben leírt programot egy vetületi transzformációt végző modullal. A program bemenő adatként gömbi földrajzi koordináta-rendszerben georeferált állományokat képez síkra a megadott vetületben. A program ismeri a [IV.](#) fejezetben leírt általános vetületi egyenleteket, így az optimalizálás végeredménye azonnal fölhasználható.

Bemeneti adatformátumnak olyan adattípusokat választottam, melyeket szinte bármilyen GIS képes exportálni, ugyanakkor egyszerűen implementálható az olvasásuk. Így vektoros állományok esetén a GeoJSON, domborzatmodellek esetén a 16-bites ESRI BIL, míg RGB-raszter esetén Worldfile segítségével georeferált PNG-állományt képes vetületbe képezni. A kimeneti adatformátum mindhárom esetben megegyezik a bemeneti formátummal, így az eredmény GIS vagy hagyományos térképszerkesztő alkalmazások számára olvasható. A program segítségével sikerült a [IV.](#) fejezetben leírt vetületekben térképet rajzolnom. A koncentrikus képzetes síkvetület példáján keresztül a következő fejezetben mutatom be, hogy az algoritmusok segítségével jó minőségű térkép készíthető.

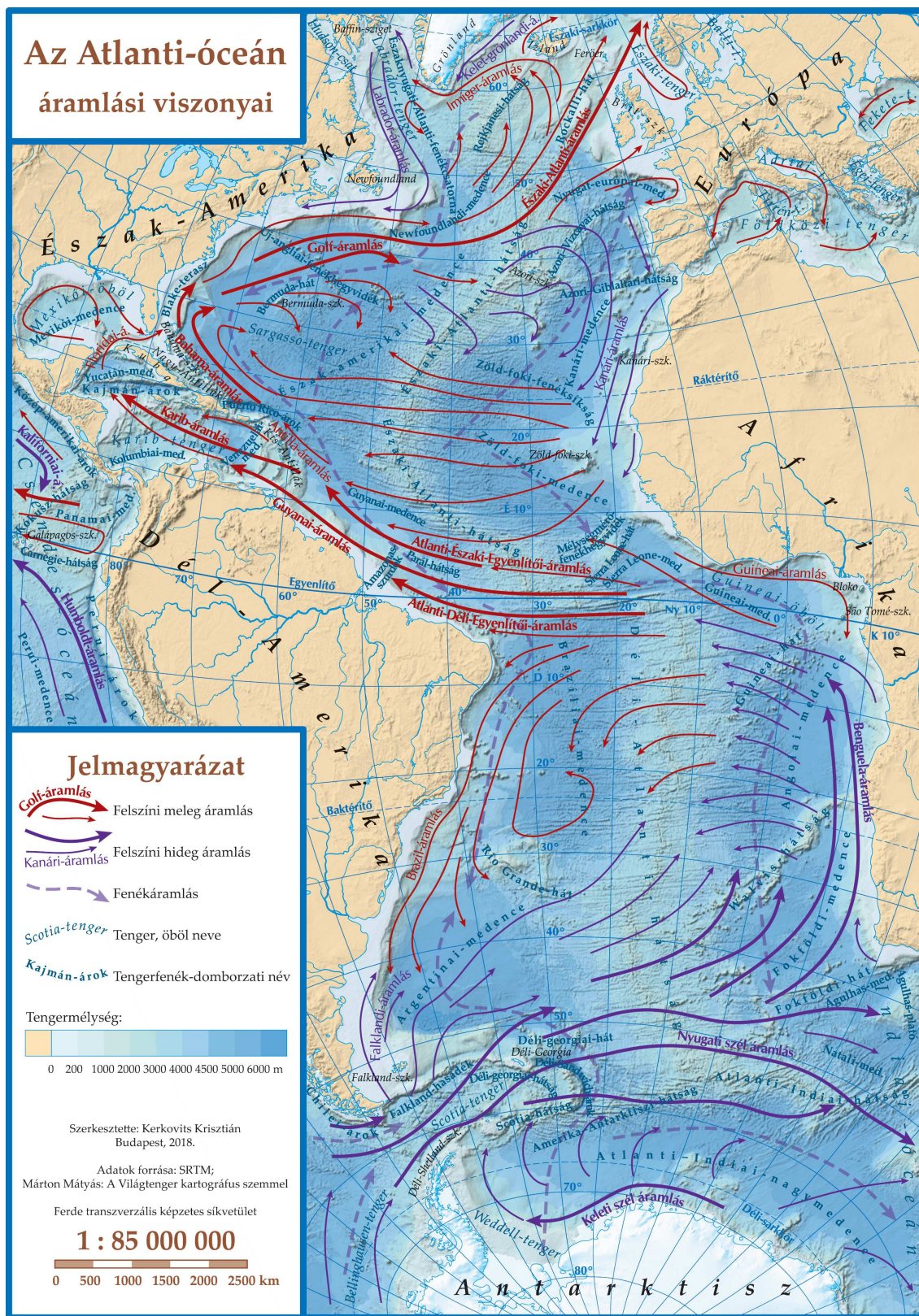
V.4. Egy optimális torzulású vetület alkalmazhatósága

A dolgozat lezárásaként elkészült egy tematikus térkép ([V.12.](#) ábra), mely a dolgozatban bemutatott algoritmusok segítségével készült. Az Atlanti-óceán területére képzetes síkvetületet alkalmaztam $\lambda_0 = -30^\circ$; $\varphi_0 = 0^\circ$ segédpólus és $\lambda_k = 25^\circ$ segédközépmeridián elhelyezésben. A képzetes síkvetület általános egyenleteit a [IV.5.a.](#) fejezetben írtuk fel. Az Airy – Kavrajzkij-kritériumot a [III.1.](#) fejezetben megadott eljárással közelítettem az óceán területére, legjobb paramétereket a [III.2.b.](#) fejezetben leírt módszerrel találtam meg.

Az elkészült vetületnek nincs analitikus úton leírt inverze, így a domborzatmodell leképezéséhez szükség volt az [V.2.](#) fejezetben ismertetett algoritmusra. A szükséges formátumkonverziókat QGIS és Global Mapper alkalmazásokkal végeztem, a kartográfiai feldolgozás OCAD segítségével történt.

A térképen látható, hogy az optimális torzulású vetületek sikerrel alkalmazhatók a hagyományos kartográfiában. Jellemzően az alábbi tapasztalatok vonhatók le:

- a legjobb kartográfiai vetületek egészen nagy területeket tudnak úgy bemutatni, hogy azokon a torzulások szabad szemmel nem érzékelhetők;
- ugyanakkor az optimalizálás határához egészen közel ugrásszerűen nő a torzultság mértéke: az ábrán Afrika alakja már nem mondható kedvezőnek; ez a hatás csökkenthető, ha az optimalizálás határát nem pontosan az ábrázolt objektum szélén, hanem attól valamilyen távolságra húzzuk meg;
- a fokhálózati vonalak futása szokatlan, ami szintén az optimalizálás határán kívül jelentkezik erőteljesebben;
- a kölcsönösen egyértelmű leképezés a tapasztalatok szerint nem biztosított az optimalizálás területén kívül; az alábbi kivágot területétől nem messze – például már az Antarktis nem ábrázolt felén is – önmaguk alá csavarodnak a vonalak ezzel elfogadhatatlan mértékű torzulást okozva.



V.12. ábra. Kartografált tematikus térkép optimális torzulású vetületben

Hatodik fejezet

Az értekezés tézisei

1. Új, nem-affin vetületi torzulási jellemzőket átdolgozva beillesztettem a lokális affin transzformációk rendszerébe; kimutattam továbbá, hogy több korábban különbözőnek vélt torzulási jellemző valójában szoros lineáris sztochasztikus kapcsolatban van egymással. Kidolgoztam egy olyan ábrázolási módszert, mellyel egyszerre szemléletesen és mérhetően olvasható le a vetület egy pontban föllépő valamennyi ismert torzulási jellemzője. ♦ GOLDBERG és GOTT (2007) bemutatták, hogy a vetületek affin transzformációtól vett eltérésének mértékét a görbültség és a ferdültség jellemzi. Ezeket a mennyiségeket megvizsgáltam, és több korábban ismeretlen összefüggést kimutattam róluk. Megállapítottam, hogy ezek a mennyiségek dimenzióval rendelkeznek. Az eredetivel ekvivalens, de a hagyományos torzulási elméletbe jobban illeszkedő kiszámítási módot adtam meg. A vetületek affin transzformációtól vett eltérését korábban a véges alakzatok torzulásainak statisztikai vizsgálatával mérték. Ugyanakkor 50 különböző tulajdonságú vetület torzultságát megmérve azt tapasztaltam, hogy a véges torzulások igen erős korreláció mellett megfeleltethetők a Tissot-féle torzulási elmélet alapján létrehozott mennyiségeknek. Az újabban bevezetett görbültség és ferdültség esetében már nem látszik ilyen összefüggés, így ezek valóban alkalmasak a vetület nem-affin torzításainak értékelésére. A görbültség és ferdültség bevezetése következtében azonban a hagyományos torzulási ellipszis már nem hordoz minden információt a vetület torzító hatásairól. Ezért fejlesztettem ki az alakváltozási diagramot, mely Tissot ellipsziséhez hasonlóan egyszerre mérhető és szemléletes módon mutatja be az új torzulások hatásait.

2. Csapatmunkában elsőként vizsgáltuk meg átfogó jelleggel a vetületi torzulások hatásait a térképolvasásra. Az eredmények vizsgálatából kimutattuk, hogy a térképolvasók nem minden esetben reagáltak úgy a torzulások megjelenésére, mint ahogy azt a szakirodalom alapján előre feltételeztük. (Szigeti

Csabával közös tézis) ♦ Egy internetes kérdőíven keresztül ugyanazokat a feladatokat különböző vetületeken oldattuk meg 247 kísérleti alannyal. A válaszadási mintázatból statisztikai módszerekkel kimutattuk, hogy a vizsgált tényezők közül a pólusvonalas ábrázolás zavarja meg a legjobban a térképolvasást. Megállapítottuk továbbá, hogy különösen a tapasztaltabb térképhasználók igen erős előítéletekkel rendelkeznek; a torzulásokat még akkor is kompenzálják, amikor azok nem is jelentkeznek. Ezzel szemben fiatalabb kísérleti alanyaink körében nagyobb jelentősége volt a vetületválasztásnak: ők hajlamosabbak voltak az információ közvetlen leolvasására. Több vizsgált tényező (pl. II. irányredukció, szakadások) esetén a szakirodalomban általánosan elfogadott feltételezésekkel ellentmondó eredmények születtek.

3. Kifejlesztettem egy numerikus módszert, mellyel tetszőleges gömbi felületdarabon értelmezett felületi integrálok közelíthetők reprodukálható módon.

♦ A variációs típusú torzultságok számításához szükség van felületi integrálok kiszámítására, melyek analitikus kifejezésére szabálytalan felületek esetén nem született kielégítő megoldás. Korábban ilyen gömbi felületekre csak a gyenge pontosságú téglalapmódszert és a nem reprodukálható Monte Carlo integrálást alkalmazták közelítő eljárásnak. A Simpson-szabály kiterjesztésével a felületi integrálok jó hatásfokú és reprodukálható közelítését oldottam meg.

4. Több tucat vetületcsalád általános vetületi egyenleteit írtam föl olyan alakban, hogy azok alkalmasak legyenek a torzulások numerikus minimalizálására. A valódi hengervetületek esetén pedig kiszámítottam a Kavrajszkij-típusú kritériumok szerinti legkisebb torzulású leképezés vetületi egyenleteit. ♦ A numerikus optimalizálás területén széleskörűen alkalmazott szimplex-eljárás használatának feltétele, hogy vetületi egyenleteink ne tartalmazzanak ismeretlen függvényeket, csak ismeretlen skalárokat. Ezért több vetületcsaládra is fölírtam olyan képleteket, melyek a kiindulási feltételeket teljesítik, miközben az ismeretlen függvények helyére Taylor- vagy Fourier-sort helyettesítettem. Nem volt szükség erre a valódi hengervetületek körében, ahol analitikus módon megkaptam a legjobb leképezés egyenleteit olyan esetekben is, amikor a szögtorzultság és a területtorzultság nemkívánatossága nem egyezik meg egymással.

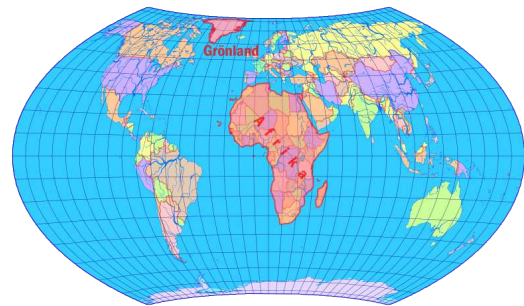
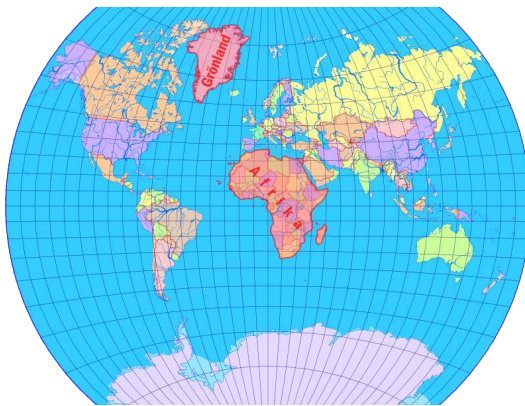
5. Megoldottam két, a kis méretarányú térképek leképezésekor adódó térinformatikai problémát. ♦ A vektoros adatsorok leképezése során a vetületi szakadások, míg a raszteres adatsoroknál a hagyományos függvényekkel fölírható inverzzel nem rendelkező vetületek kezelése a térinformatika gyenge pontjának mutatkozott. Mivel az optimális vetületek alkalmazásakor mindkét nehézség jelentkezésével számolnunk kell, ezek lehetetlenné tennék ezen vetületek gyakorlati alkalmazását, ezért megoldást dolgoztam ki rájuk.

6. Egy tematikus térkép példáján bemutattam, hogy az előbbi eredmények a hagyományos kartográfia területén is alkalmazhatók. ♦ Elkészítettem egy, a hagyományos kartográfia elvárásainak megfelelő térképet egy általam kidolgozott optimális torzulású vetületben. Ezzel bemutattam, hogy a fentiekben bemutatott eredmények a térképkészítés hagyományainak betartása mellett is sikerrel alkalmazhatók.

A. függelék

A térképolvasási kérdőív és a rá adott válaszok

Ezeket a kérdéseket kapták a II. fejezetben ismertetett kérdőív kitöltői. A kísérleti csoport mindig a bal, a kontrollcsoport a jobb oldali térképeken dolgozott. A válaszlehetőségek közül 1 jelöli a leginkább helytelen, 5 a legkevésbé helytelen, 6 helyes választ.



1. kérdés: Hányszor nagyobb Afrika területe a valóságban, mint Grönlandé?

egyforma (1)

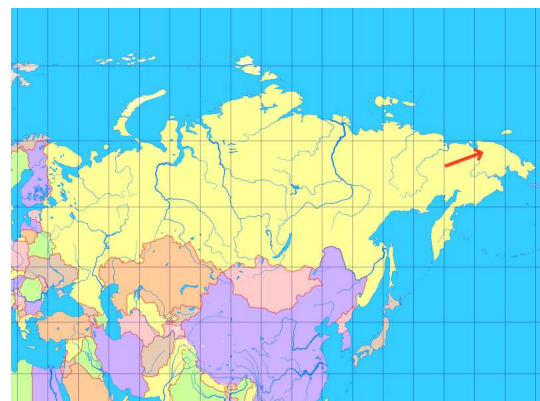
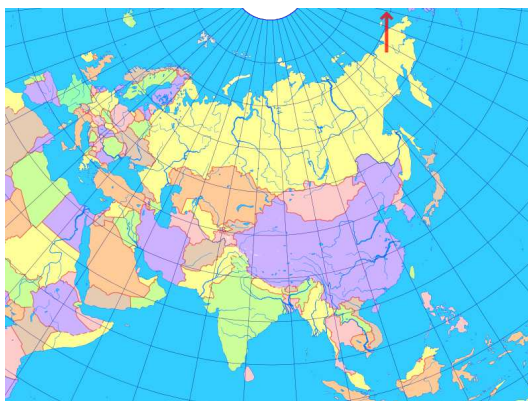
másfélszer (2)

háromszor (3)

öttször (4)

tizenöttször (6)

huszonöttször (5)



2. kérdés: Milyen égtáj felé mutat a piros nyíl Csukcsföldön?

észak (4)

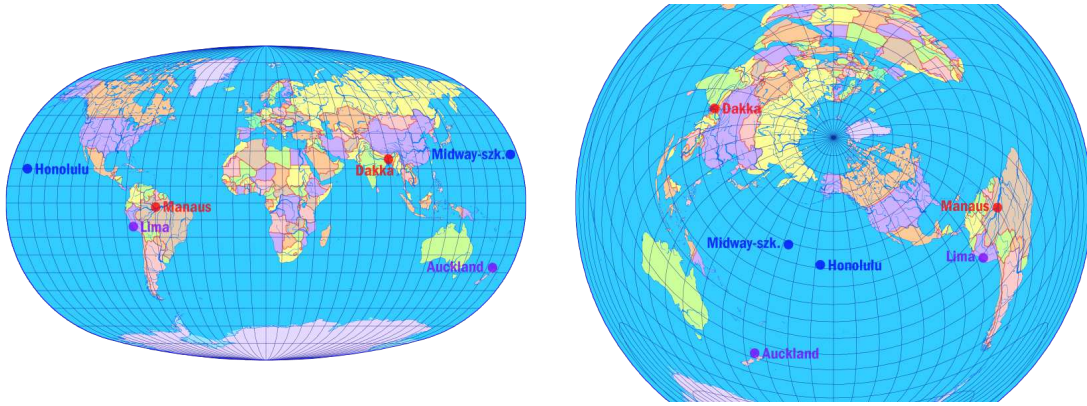
dél-délnyugat (1)

kelet (5)

északnyugat (3)

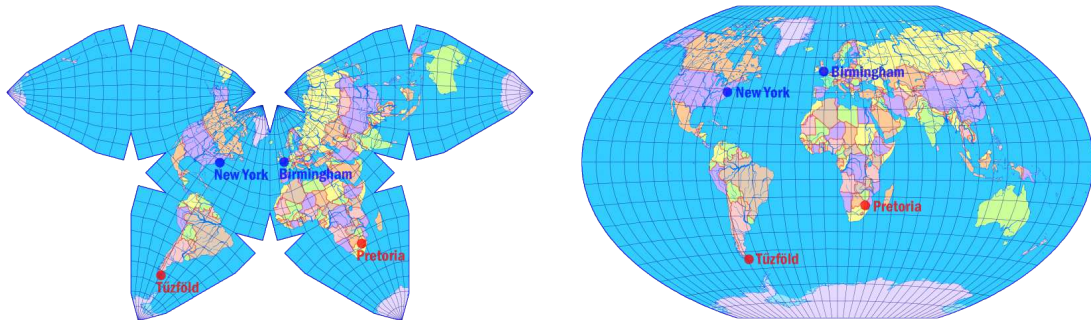
dél (2)

kelet-északkelet (6)



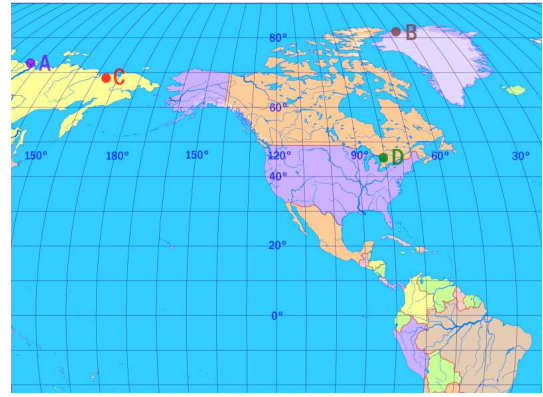
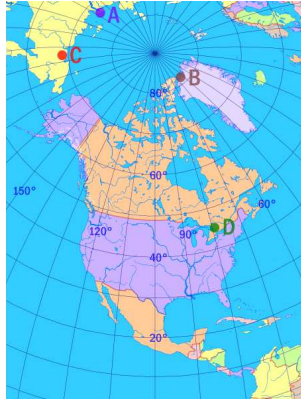
3. kérdés: Rendezze a valós földi távolság szerint növekvő sorrendbe a pontpárokat (a legközelebbitől a legtávolabbiig)!

Auckland–Lima; Dacca–Manaus; Midway-szk.–Honolulu (2)	Dacca–Manaus; Auckland–Lima; Midway-szk.–Honolulu (1)	Auckland–Lima; Midway-szk.–Honolulu; Dacca–Manaus (4)
Midway - szk. – Honolulu; Auckland – Lima; Dacca – Manaus (6)	Dacca–Manaus; Midway-szk.–Honolulu; Auckland–Lima (3)	Midway-szk.–Honolulu; Dacca–Manaus; Auckland–Lima (5)



4. kérdés: Melyik állítás helyes a légvonalban mért távolság figyelembe vételével?

Tüzföld és Pretoria között a távolság közel ugyanakkora, mint New York és Birmingham között. (4)	Tüzföld és Pretoria között a távolság mintegy másfélszer nagyobb, mint New York és Birmingham között. (6)	Tüzföld és Pretoria között a távolság nagyjából kétszer nagyobb, mint New York és Birmingham között. (5)
Tüzföld és Pretoria között a távolság kb. háromszor nagyobb, mint New York és Birmingham között. (2)	New York és Birmingham között a távolság mintegy másfélszer nagyobb, mint Pretoria és Tüzföld között. (3)	New York és Birmingham között a távolság nagyjából háromszor nagyobb, mint Pretoria és Tüzföld között. (1)



5. kérdés: Rendezze sorba a pontokat a legészakabbtól a legdélebbi felé haladva!

A B C D (4)

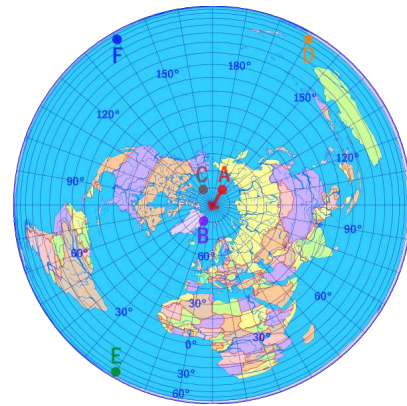
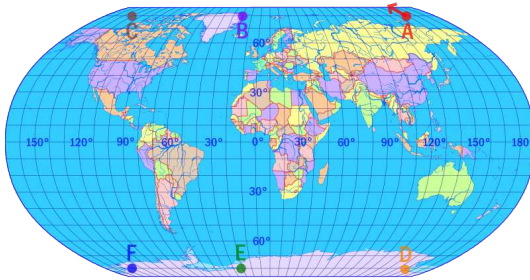
A C B D (2)

B A C D (6)

B C A D (5)

C D A B (1)

C B A D (3)



6. kérdés: Ha az A pontból hosszúsági kör mentén, a piros nyíl irányába indulunk, akkor a térkép melyik pontját érjük el először?

Vissza az A-ra (4)

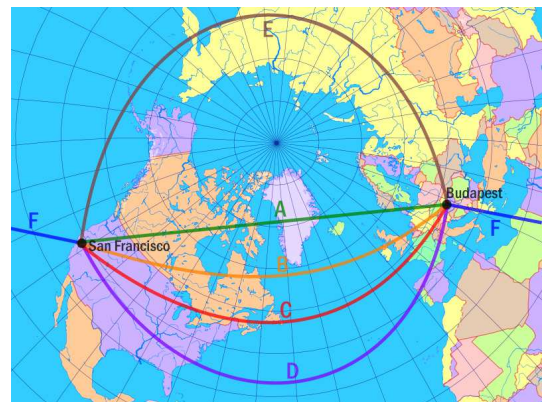
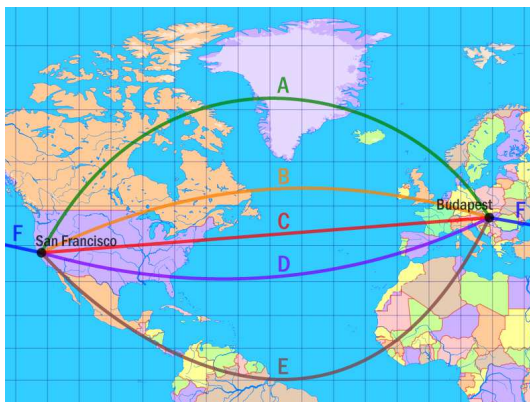
B (6)

C (5)

D (2)

E (3)

F (1)



7. kérdés: Melyik útvonalon kell Budapestről San Francisco felé repülőgéppel utazni, ha a legrövidebb utat választjuk?

A (6)

B (5)

C (4)

D (3)

E (2)

F (1)

Ez a táblázat azt mutatja be, hogy az előző oldalakon leírt internetes kérdőívre az egyes demográfiai csoportokból hány fő jelölt be egy adott válaszlehetőséget. A válaszlehetőségek közül 1 jelölte a leginkább helytelen, 5 a legkevésbé helytelen, 6 helyes választ. A kérdések és az itt számmal jelölt válaszlehetőségek teljes szövege az előző oldalakon olvashatók.

			Területtorzulás							Meridiánkonv.							Ellenmeridián						
o: nem tudja; 1–5: helytelen; 6: helyes			0	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4	5	6
Nem	<i>Férfi</i>	Kísérl.	1	2	6	13	24	4	22	0	0	0	7	3	2	60	2	7	2	2	1	17	41
		Kontr.	2	0	2	8	16	10	18	0	0	0	4	8	6	38	4	6	0	1	1	7	37
	<i>Nő</i>	Kísérl.	0	3	18	7	12	7	17	0	0	0	1	5	5	53	2	7	1	5	0	17	32
		Kontr.	2	2	4	6	21	3	17	0	2	0	4	7	2	40	3	6	1	4	3	7	31
Életkor	<i>20 alatt</i>	Kísérl.	0	0	4	4	3	0	2	0	0	0	0	1	1	11	1	0	0	1	0	3	8
		Kontr.	1	0	1	1	7	0	2	0	0	0	0	1	1	10	1	2	0	1	1	0	7
	<i>21–25</i>	Kísérl.	1	2	13	5	12	3	9	0	0	0	3	2	3	37	1	3	1	2	0	9	29
		Kontr.	1	2	2	7	12	5	10	0	2	0	3	4	5	25	1	5	1	2	1	6	23
	<i>26–30</i>	Kísérl.	0	3	2	7	10	2	9	0	0	0	3	2	2	26	0	5	2	2	1	8	15
		Kontr.	1	0	0	3	11	2	11	0	0	0	3	5	2	18	1	2	0	1	1	5	18
	<i>30 felett</i>	Kísérl.	0	0	5	4	11	6	19	0	0	0	2	3	1	39	2	6	0	2	0	14	21
		Kontr.	1	0	3	3	7	6	12	0	0	0	2	5	0	25	4	3	0	1	1	3	20
Tanulmányok	<i>Alapfokú</i>	Kísérl.	0	0	4	4	1	0	1	0	0	0	0	2	1	7	1	0	0	1	0	3	5
		Kontr.	1	0	0	0	4	0	2	0	0	0	0	1	1	5	1	0	0	1	1	0	4
	<i>Középfokú</i>	Kísérl.	1	2	15	8	15	5	16	0	0	0	5	3	5	49	2	9	1	2	0	13	35
		Kontr.	2	2	3	8	21	5	13	0	1	0	6	4	6	37	3	9	1	2	1	6	32
	<i>Felsőfokú</i>	Kísérl.	0	3	5	8	20	6	22	0	0	0	3	3	1	57	1	5	2	4	1	18	33
		Kontr.	1	0	3	6	12	8	20	0	1	0	2	10	1	36	3	3	0	2	2	8	32
Földrajz, földtudomány tapasztalat	<i>Nincs</i>	Kísérl.	0	3	17	18	13	4	16	0	0	0	3	5	5	58	2	9	0	4	0	18	38
		Kontr.	3	2	2	10	22	3	18	0	2	0	6	8	4	40	6	6	1	3	2	4	38
	<i>Van</i>	Kísérl.	1	2	7	2	23	7	23	0	0	0	5	3	2	55	2	5	3	3	1	16	35
		Kontr.	1	0	4	4	15	10	17	0	0	0	2	7	4	38	1	6	0	2	2	10	30
Térképhasználat	<i>Ritka</i>	Kísérl.	0	3	11	10	9	4	5	0	0	0	1	4	2	35	2	7	0	3	0	8	22
		Kontr.	3	1	1	9	12	1	10	0	0	0	4	4	2	27	5	3	0	1	1	5	22
	<i>Közepes</i>	Kísérl.	1	1	6	5	13	5	19	0	0	0	5	4	1	40	2	4	2	3	1	12	26
		Kontr.	0	1	4	3	12	8	11	0	1	0	3	6	3	26	2	4	0	2	1	5	25
	<i>Gyakori</i>	Kísérl.	0	1	7	5	14	2	15	0	0	0	2	0	4	38	0	3	1	1	0	14	25
		Kontr.	1	0	1	2	13	4	14	0	1	0	1	5	3	25	0	5	1	2	2	4	21

			Szakadások							Fokhálózat							Pólusvonal							II. irányredukció						
o: nem tudja; 1–5: helytelen; 6: helyes			0	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4	5	6
Nem	<i>Férfi</i>	Kísérl.	3	1	3	2	26	12	25	0	0	1	0	2	0	69	0	6	7	4	3	21	31	0	1	0	3	14	20	34
		Kontr.	1	0	1	0	16	9	29	1	0	0	1	0	3	51	2	0	4	0	4	3	43	1	1	2	3	22	6	21
	<i>Nő</i>	Kísérl.	3	0	3	4	17	9	28	1	0	1	0	0	1	61	0	4	22	1	1	23	13	0	5	0	2	21	12	24
		Kontr.	1	1	2	4	14	4	29	0	0	0	0	0	3	52	1	0	4	1	1	6	42	1	1	1	2	19	8	23
Életkor	<i>20 alatt</i>	Kísérl.	1	0	0	0	5	2	5	0	0	1	0	0	1	11	0	0	0	1	1	9	2	0	1	0	3	5	2	2
		Kontr.	0	0	0	2	4	0	6	0	0	0	0	0	1	11	1	0	0	1	0	0	10	0	0	0	0	3	4	5
	<i>21–25</i>	Kísérl.	2	0	3	1	13	6	20	1	0	0	0	1	0	43	0	4	12	0	1	13	15	0	2	0	1	16	9	17
		Kontr.	1	0	1	1	9	5	22	1	0	0	0	0	3	35	2	0	3	0	3	3	28	2	1	0	1	17	5	13
	<i>26–30</i>	Kísérl.	1	0	3	0	10	6	13	0	0	0	0	0	0	33	0	3	5	2	0	11	12	0	2	0	0	7	12	12
		Kontr.	0	1	1	0	6	4	16	0	0	0	0	0	2	26	0	0	3	0	0	5	20	0	0	3	3	11	2	9
	<i>30 felett</i>	Kísérl.	2	1	0	5	15	7	15	0	0	1	0	1	0	43	0	3	12	2	2	11	15	0	1	0	1	7	9	27
		Kontr.	1	0	1	1	11	4	14	0	0	0	1	0	0	31	0	0	2	0	2	1	27	0	1	0	1	10	3	17
Tanulmányok	<i>Alapfokú</i>	Kísérl.	1	0	0	0	1	3	5	0	0	1	0	0	1	8	0	0	0	1	0	8	1	0	0	0	3	4	2	1
		Kontr.	0	0	0	1	2	0	4	0	0	0	0	0	0	7	0	0	0	0	0	0	7	0	0	0	0	1	3	3
	<i>Középfokú</i>	Kísérl.	3	0	4	2	19	10	24	1	0	1	0	1	0	59	0	6	15	0	3	20	18	0	6	0	1	16	15	24
		Kontr.	0	0	2	1	14	6	31	0	0	0	0	0	4	50	1	0	6	1	3	3	40	0	2	1	3	22	6	20
	<i>Felsőfokú</i>	Kísérl.	2	1	2	4	23	8	24	0	0	0	0	1	0	63	0	4	14	4	1	16	25	0	0	0	1	15	15	33
		Kontr.	2	1	1	2	14	7	23	1	0	0	1	0	2	46	2	0	2	0	2	6	38	2	0	2	2	18	5	21
Földrajz, földtudomány tapasztalat	<i>Nincs</i>	Kísérl.	4	0	4	3	19	12	29	1	0	2	0	0	1	67	0	4	22	3	2	20	20	0	6	0	3	24	13	25
		Kontr.	1	1	1	2	13	10	32	0	0	0	1	0	4	55	1	0	5	1	0	5	48	1	1	2	4	18	10	24
	<i>Van</i>	Kísérl.	2	1	2	3	24	9	24	0	0	0	0	2	0	63	0	6	7	2	2	24	24	0	0	0	2	11	19	33
		Kontr.	1	0	2	2	17	3	26	1	0	0	0	0	2	48	2	0	3	0	5	4	37	1	1	1	1	23	4	20
Térképhasználat	<i>Ritka</i>	Kísérl.	1	0	2	1	15	10	13	0	0	1	0	1	0	40	0	4	13	2	0	10	13	0	3	0	0	16	9	14
		Kontr.	1	0	1	1	10	5	19	0	0	0	1	0	3	33	0	0	4	0	0	1	32	0	1	1	2	15	4	14
	<i>Közepes</i>	Kísérl.	3	1	1	3	16	4	22	0	0	0	0	1	1	48	0	4	11	3	1	12	19	0	1	0	2	11	10	26
		Kontr.	1	1	1	2	12	3	19	1	0	0	0	0	2	36	2	0	3	0	3	5	26	2	0	1	3	11	5	17
	<i>Gyakori</i>	Kísérl.	2	0	3	2	12	7	18	1	0	1	0	0	0	42	0	2	5	0	3	22	12	0	2	0	3	8	13	18
		Kontr.	0	0	1	1	8	5	20	0	0	0	0	0	1	34	1	0	1	1	2	3	27	0	1	1	0	15	5	13

B. függelék

Globális torzultságok számított értékei

Globális torzultságok értékei a III.4.a. fejezetben leírt módon számolva. Alábbi torzultsági értékek a $\pm 85^\circ$ -os szélességek között értendők. A táblázatok az I. fejezet jelöléseit használják a különböző torzultságok megkülönböztetésére.

Vetület	E	E_τ	E_l	E_I	\tilde{E}	\tilde{E}_τ	\tilde{E}_I
Lambert sík (transzverzális)	1,0073	0	1,4245	0,5419	1,0073	0	0,506
Postel (transzverzális)	0,8698	0,8698	0,8698	0,6548	0,7477	0,6013	0,5201
Sztereografikus (csak -40° -ig)	1,1007	1,5566	0	0,7783	0,6549	0,9262	0,4631
James (csak -40° -ig)	0,6982	0,9194	0,36	0,4999	0,4272	0,4851	0,2912
Lambert henger	0,691	0	0,9773	0,3636	0,691	0	0,35
Behrmann	0,59	0	0,8344	0,3095	0,59	0	0,3009
Gall–Peters	0,5535	0	0,7827	0,286	0,5535	0	0,2779
Négyzetes	0,4886	0,4886	0,4886	0,3508	0,4413	0,3882	0,3033
Marinus	0,4172	0,4172	0,4172	0,2976	0,403	0,3882	0,2814
Mercator	0,691	0,9773	0	0,4886	0,549	0,7763	0,3882
Perspektív henger	1,0926	1,4659	0,4886	0,8159	0,893	1,1645	0,6647
Braun	0,5208	0,667	0,3123	0,379	0,4291	0,5204	0,3083
Gall	0,4154	0,5277	0,258	0,2942	0,4107	0,5204	0,292
Miller	0,5534	0,7474	0,2322	0,3993	0,4452	0,5852	0,3198
Mercator – Sanson	0,6647	0	0,9401	0,34	0,6647	0	0,3247
Sanson – Wagner	0,4321	0,3222	0,5192	0,2778	0,4117	0,2635	0,2479
Kavrajzkij VI.	0,4884	0	0,6908	0,2484	0,4884	0	0,242
Eckert V.	0,4201	0,2683	0,5301	0,2476	0,4168	0,2577	0,2476
Eckert VI.	0,494	0	0,6986	0,2511	0,494	0,0001	0,2445
Apianus II.	0,4607	0,2766	0,5899	0,2882	0,4446	0,2178	0,2589
Apianus – Wagner	0,4282	0,3543	0,491	0,2853	0,4011	0,2841	0,2514
Mollweide	0,5337	0	0,7547	0,2722	0,5337	0	0,2641
Mollweide – Wagner	0,476	0	0,6732	0,2424	0,476	0	0,2366
Eckert III.	0,4035	0,3312	0,4646	0,261	0,3973	0,3161	0,2599
Eckert IV.	0,4698	0,0001	0,6644	0,2405	0,4698	0	0,2351
Kavrajzkij VII.	0,3693	0,2921	0,433	0,2386	0,3662	0,2841	0,2317
Baranyi IV.	0,4066	0,2916	0,4957	0,2574	0,4032	0,2819	0,2487
Robinson	0,3929	0,2003	0,5182	0,2333	0,3922	0,1976	0,2328
Loximutális	0,4348	0,3301	0,5189	0,2844	0,4114	0,2631	0,252
Werner	0,7793	0	1,1021	0,4006	0,7793	0	0,3768
Bonne	0,7386	0	1,0445	0,3794	0,7386	0	0,3591
Amerikai polikónikus	0,7682	0,7469	0,7888	0,551	0,6558	0,4878	0,4206
War Office	0,7738	0,6285	0,8958	0,5118	0,7398	0,5404	0,4441
Területtartó polikónikus	0,7618	0	1,0773	0,3898	0,7618	0	0,3666
Lagrange	0,8416	1,1903	0	0,5951	0,5042	0,7131	0,3565
Van der Grinten I.	0,5767	0,7972	0,172	0,4083	0,4413	0,5999	0,3096
Ginzburg V.	0,3738	0,2036	0,4878	0,2166	0,3725	0,1988	0,2105
Aitoff	0,5219	0,2383	0,6985	0,3097	0,5022	0,1284	0,2662
Aitoff – Wagner	0,4184	0,341	0,4835	0,2736	0,3866	0,2553	0,2342
Hammer	0,5792	0	0,8191	0,2946	0,5792	0	0,284
Hammer – Wagner	0,4592	0	0,6494	0,2327	0,4592	0	0,2273
Eckert-Greifendorff	0,6119	0	0,8653	0,3129	0,6119	0	0,3009

<i>Vetület</i>	E	E_{τ}	E_l	E_I	\tilde{E}	\tilde{E}_{τ}	\tilde{E}_I
Winkel III.	0,367	0,2027	0,4779	0,2112	0,367	0,2024	0,2085
Goode	0,3482	0	0,4924	0,1763	0,3482	0	0,1739
Boggs	0,3226	0	0,4562	0,1634	0,3226	0	0,1615
Berghaus	0,3733	0,2505	0,4646	0,2079	0,3631	0,2187	0,1886
William – Olsson	0,3491	0	0,4937	0,1753	0,3491	0	0,1728
Cahill gnomonikus	0,388	0,5205	0,1735	0,2729	0,2449	0,2997	0,166
Cahill szögtartó	0,2108	0,2981	0	0,149	0,1608	0,2275	0,1137
Waterman	0,1577	0,1691	0,1455	0,0962	0,1141	0,0697	0,061

<i>Vetület</i>	$E_{\bar{l}}$	$E_{\bar{\tau}}$	$E_{\bar{o}}$	$\tilde{E}_{\bar{l}}$	$\tilde{E}_{\bar{\tau}}$
Lambert sík (transzverzális)	0,4614	1,1688	0,2631	0,4232	1,1661
Postel (transzverzális)	0,5785	1,2859	0,2146	0,4396	1,1913
Sztereografikus (csak -40° -ig)	0,6601	1,3299	0,1538	0,3655	0,983
James (csak -40° -ig)	0,4502	1,0468	0,1215	0,2558	0,8995
Lambert henger	0,3315	0,79	0,1976	0,3029	0,7894
Behrmann	0,2698	0,79	0,1668	0,252	0,7894
Gall–Peters	0,2446	0,79	0,172	0,233	0,7894
Négyzetes	0,3376	0,883	0,1622	0,2772	0,8543
Marinus	0,2775	0,858	0,1495	0,2567	0,8543
Mercator	0,4389	—	0,1801	0,331	—
Perspektív henger	0,7384	—	0,3493	0,5841	—
Braun	0,3595	0,9615	0,1547	0,279	0,8993
Gall	0,2664	0,9143	0,148	0,2634	0,8993
Miller	0,3736	1,0106	0,1555	0,2853	0,9322
Mercator – Sanson	0,2839	0,7645	0,2074	0,2734	0,7638
Sanson – Wagner	0,2406	0,8027	0,1384	0,2084	0,7927
Kavrajzkij VI.	0,2044	0,77	0,1512	0,1994	0,7692
Eckert V.	0,2088	0,8041	0,14	0,2086	0,793
Eckert VI.	0,2072	0,7703	0,1535	0,2022	0,7695
Apianus II.	0,242	0,7663	0,1465	0,2124	0,759
Apianus – Wagner	0,2492	0,8053	0,135	0,2108	0,7913
Mollweide	0,2215	0,7505	0,1645	0,2162	0,7494
Mollweide – Wagner	0,1971	0,759	0,1449	0,1922	0,7582
Eckert III.	0,2217	0,8176	0,1352	0,2207	0,8003
Eckert IV.	0,1909	0,7512	0,1374	0,1852	0,7505
Kavrajzkij VII.	0,2001	0,7913	0,1239	0,1941	0,7913
Baranyi IV.	0,2146	0,7746	0,1365	0,2079	0,7745
Robinson	0,1939	0,7751	0,1284	0,1936	0,7698
Loximutális	0,2436	0,7785	0,1376	0,2085	0,7678
Werner	0,3488	0,9102	0,2486	0,332	0,9096
Bonne	0,3287	0,8666	0,2351	0,3144	0,866
Amerikai polikónikus	0,4918	1,1119	0,2065	0,3643	1,0047
War Office	0,4375	1,0333	0,2328	0,3708	0,9913
Területtartó polikónikus	0,3498	0,8943	0,2543	0,3343	0,8935
Lagrange	0,5771	1,4039	0,1526	0,3167	0,9787
Van der Grinten I.	0,3657	1,0191	0,1422	0,2624	0,9098
Ginzburg V.	0,1852	0,7876	0,1285	0,1819	0,7876
Aitoff	0,2658	0,7911	0,1655	0,2284	0,7778
Aitoff – Wagner	0,24	0,8143	0,1326	0,1993	0,7962
Hammer	0,2505	0,7833	0,1885	0,2442	0,7823
Hammer – Wagner	0,1994	0,7764	0,1511	0,1958	0,776
Eckert-Greifendorff	0,2602	0,765	0,1912	0,2516	0,7641
Winkel III.	0,1841	0,774	0,1299	0,1834	0,7727
Goode	0,1303	0,6108	0,0982	0,128	0,6103
Boggs	0,1245	0,6172	0,0948	0,1233	0,6169
Berghaus	0,1532	0,9429	0,0902	0,1317	0,8863
William – Olsson	0,126	0,7993	0,0967	0,1238	0,795

<i>Vetület</i>	$E_{\bar{l}}$	$E_{\bar{r}}$	$E_{\bar{o}}$	$\tilde{E}_{\bar{l}}$	$\tilde{E}_{\bar{r}}$
Cahill gnomonikus	0,2536	0,9159	0,0806	0,1108	0,7379
Cahill szögtartó	0,1353	0,8048	0,0644	0,0895	0,7514
Waterman	0,0879	0,7258	0,0309	0,042	0,7256

<i>Vetület</i>	E_{κ}	E_{σ}	E_G
Lambert sík (transzverzális)	1,2157	1,4055	1,314
Postel (transzverzális)	1,294	1,3256	1,3099
Sztereografikus (csak -40° -ig)	0,7415	0,7415	0,7415
James (csak -40° -ig)	0,8612	0,3729	0,6636
Lambert henger	0,9052	1,7152	1,3714
Behrmann	0,9863	1,6501	1,3594
Gall–Peters	1,1019	1,5565	1,3485
Négyzetes	0,911	1,386	1,1728
Marinus	0,9547	1,3156	1,1494
Mercator	1,0353	1,0353	1,0353
Perspektív henger	2,1662	2,1651	2,1657
Braun	0,9463	1,2157	1,0893
Gall	1,0105	1,1012	1,0568
Miller	0,9599	1,1302	1,0485
Mercator – Sanson	1,8029	1,4543	1,6379
Sanson – Wagner	1,1339	1,0548	1,0951
Kavrajzkij VI.	1,4102	1,3877	1,399
Eckert V.	1,1436	1,0529	1,0992
Eckert VI.	1,3972	1,3791	1,3882
Apianus II.	1,2601	1,033	1,1522
Apianus – Wagner	1,0983	1,0682	1,0833
Mollweide	1,6612	1,3959	1,5343
Mollweide – Wagner	1,4829	1,4405	1,4619
Eckert III.	1,0055	1,1204	1,0645
Eckert IV.	1,452	1,4709	1,4615
Kavrajzkij VII.	1,1045	0,9873	1,0476
Baranyi IV.	1,2824	1,049	1,1715
Robinson	1,2262	1,1837	1,2051
Loximutális	1,1217	1,001	1,0631
Werner	1,5927	1,1801	1,4017
Bonne	1,6533	1,2587	1,4693
Amerikai polikónikus	1,1235	0,645	0,9161
War Office	1,3636	1,0065	1,1984
Területtartó polikónikus	1,2371	0,6512	0,9886
Lagrange	0,791	0,791	0,791
Van der Grinten I.	0,9114	0,7167	0,8198
Ginzburg V.	1,1546	0,8616	1,0187
Aitoff	1,2824	0,8808	1,1001
Aitoff – Wagner	1,0806	0,9267	1,0066
Hammer	1,4	1,0187	1,2243
Hammer – Wagner	1,306	1,2428	1,2748
Eckert-Greifendorff	1,7211	1,4246	1,5798
Winkel III.	1,1852	0,8412	1,0277
Goode	1,0356	0,7268	0,8946
Boggs	1,0394	0,6884	0,8815
Berghaus	0,9081	0,85	0,8795
William – Olsson	0,794	0,3588	0,6161
Cahill gnomonikus	0	0,8442	0,5969
Cahill szögtartó	0,5587	0,5587	0,5587
Waterman	0,6392	0,5438	0,5934

C. függelék

Néhány optimális torzulású vetület közeli képlete

E jelöli a leírásban a megadott vetület torzultságát az Airy – Kavrajszkij-kritérium szerint, míg \hat{E} egy hagyományos (szögletes zárójelben szereplő) vetület torzultságát.

Ábra	Leírás	Képletek	Együtthatók
IV.3	Valódi kúpvetület Oroszországra. $E \approx 0,009759$ [de l'Isle $\hat{E} \approx 0,013183$]	(IV.21, IV.25)	$r_0 = 0,037185; r_1 = 1,006292; r_2 = -0,006062;$ $n = 0,883295; \lambda_k = 95^\circ$
IV.4	Ferdetengelyű valódi síkvetület a teljes földfelszínre, segédpólus a szárazföldekhez igazítva. $E \approx 0,738100$ [Postel $\hat{E} \approx 0,864721$]	(IV.21, IV.26)	$r_1 = 0,706809; r_3 = 0,001985; r_5 = 0,000324;$ $n = 1; \varphi_0 = 20^\circ; \lambda_0 = 25^\circ$
IV.5.a	Pólusvonalas képzetes hengervetület a $\pm 85^\circ$ -os szélességek közötti területre optimalizálva. $E \approx 0,332670$ [Robinson $\hat{E} \approx 0,392868$]	(IV.28)	$v_1 = 0,999917; v_3 = 0,010557; v_5 = -0,002012;$ $\xi_{01} = 0,747136; \xi_{03} = 0,001350;$ $\xi_{21} = -0,000989; \xi_{05} = 0,000482;$ $\xi_{23} = -0,014142; \xi_{41} = 0,001421; \lambda_k = 10^\circ$
IV.5.b	Póluspontos képzetes hengervetület a $\pm 85^\circ$ -os szélességek közötti területre optimalizálva. $E \approx 0,381135$ [Baranyi IV. $\hat{E} \approx 0,406667$]	(IV.29, IV.28.b)	$v_1 = 1,018321; v_3 = -0,043536; v_5 = 0,030679;$ $\xi_{01} = 0,730131; \xi_{03} = 0,005321; \xi_{21} = 0,216127;$ $\xi_{05} = 0,000170; \xi_{23} = -0,006444;$ $\xi_{41} = 0,315799; \lambda_k = 10^\circ$
IV.5.c	Pólusíves képzetes hengervetület a $\pm 85^\circ$ -os szélességek közötti területre optimalizálva. $E \approx 0,347661$ [Baranyi IV. $\hat{E} \approx 0,406667$]	(IV.30, IV.28.b)	$v_1 = 1,008943; v_3 = -0,012267; v_5 = 0,009588;$ $\xi_{01} = 0,738351; \xi_{03} = 0,003767; \xi_{21} = 0,103298;$ $\xi_{05} = 0,000325; \xi_{23} = -0,014208;$ $\xi_{41} = 0,100022; \lambda_k = 10^\circ$
IV.5.d	Területtartó póluspontos képzetes hengervetület a $\pm 85^\circ$ -os szélességek közötti területre optimalizálva. $E \approx 0,464134$ [Mollweide $\hat{E} \approx 0,533665$]	(IV.32, IV.28.b)	$v_1 = 1,239102; v_3 = -0,102911; v_5 = -0,015134;$ $\lambda_k = 10^\circ$
IV.5.e	Területtartó pólusvonalas képzetes hengervetület a $\pm 85^\circ$ -os szélességek közötti területre optimalizálva. $E \approx 0,463242$ [Eckert IV. $\hat{E} \approx 0,469810$]	(IV.33)	$v_1 = 1,246628; v_3 = 0,24460; v_5 = 0,089942;$ $\lambda_k = 10^\circ$

Ábra	Leírás	Képletek	Együtthatók
IV.5.f	Területtartó pólusíves képzetes hengervetület a $\pm 85^\circ$ -os szélességek közötti területre optimalizálva. $E \approx 0,467306$ [Mollweide $\hat{E} \approx 0,533665$]	(IV.34)	$v_1 = 1,237200; v_3 = -0,024579; v_5 = -0,108962;$ $\lambda_k = 10^\circ$
IV.7.a	Igazi képzetes kúpvetület a volt Szovjetunió területére. $E \approx 0,012341$ [de l'Isle $\hat{E} \approx 0,014802$]	(IV.25, IV.36)	$r_0 = 0,056417; r_1 = 1,006244; r_2 = -0,005326;$ $g_{01} = 0,833846; g_{03} = 0,003177; g_{11} = 0,053802;$ $g_{05} = -0,000282; g_{13} = -0,002273;$ $g_{21} = -0,047722; \lambda_k = 85^\circ$
IV.7.b	Póluspontos területtartó igazi képzetes kúpvetület Észak-Amerikára (Kanada, USA, Mexikó) és Grönlandra. $E \approx 0,029772$ [Lambert sík $\hat{E} \approx 0,038168$]	(IV.40)	$r_0 = 0,013811; r_1 = 1,021401; r_2 = -0,015247;$ $\lambda_k = -100^\circ$
IV.7.c	Pólusvonalas területtartó igazi képzetes kúpvetület Euráziára (Indonézia nélkül). $E \approx 0,056331$ [Albers $\hat{E} \approx 0,069761$]	(IV.25, IV.38)	$r_0 = 0,022579; r_1 = 1,214478; r_2 = 0,090403;$ $\lambda_k = 75^\circ$
IV.7.d	Ortogonalis pszeudopolikónikus vetület Kanadára. $E \approx 0,009208$ [de l'Isle $\hat{E} \approx 0,014363$]	(IV.25, IV.37, IV.43)	$r_0 = -0,053409; r_1 = 1,305491; r_2 = -0,206703;$ $g_1 = 0,501344; g_3 = 0,030489; g_5 = 0,005334;$ $\zeta_1 = -0,987832; \zeta_2 = -0,006842; \lambda_k = -95^\circ$
IV.7.e	Pszeudopolikónikus vetület Dél-Amerikára. $E \approx 0,013759$ [Postel $\hat{E} \approx 0,021289$]	(IV.25, IV.36, IV.37)	$r_0 = 0,816961; r_1 = -1,200728; r_2 = 2,751954;$ $g_{01} = 0,951608; g_{03} = -0,003217;$ $g_{11} = -0,776218; g_{05} = 0,023991;$ $g_{13} = 0,000006; g_{21} = 0,179378; \zeta_1 = -0,996830;$ $\zeta_2 = 0,000421; \varphi_0 = -90^\circ; \lambda_k = -120^\circ$
IV.7.f	Területtartó pszeudopolikónikus vetület az Indiai-óceánra. $E \approx 0,067841$ [Lambert sík $\hat{E} \approx 0,077428$]	(IV.40.a, IV.42)	$r_0 = 0,179763; r_1 = 1,921635; r_2 = 1,520680;$ $\zeta_1 = 1,066500; \zeta_2 = -0,291029; \varphi_0 = -90^\circ;$ $\lambda_k = 100^\circ$
IV.8.a	Pszeudopolikónikus vetület a teljes földfelszínre. $E \approx 0,339545$ [Winkel III. $\hat{E} \approx 0,385118$]	(IV.44)	$r_1 = 0,130799; r_3 = 0,026368; r_5 = 0,002352;$ $g_{01} = 0,754294; g_{03} = -0,000107;$ $g_{21} = -0,060669; g_{05} = 0,000571;$ $g_{23} = -0,011529; g_{41} = -0,008108;$ $\zeta_1 = 0,888578; \zeta_3 = 0,013038; \zeta_5 = 0,000581;$ $\lambda_k = 10^\circ$
IV.8.b	Ortogonalis pszeudopolikónikus vetület a teljes földfelszínre. $E \approx 0,392901$ [Marinus $\hat{E} \approx 0,450888$]	(IV.44.a, IV.46, IV.44.c)	$r_1 = 0,256734; r_3 = 0,022406; r_5 = -0,009767;$ $g_1 = 0,369301; g_3 = -0,000504; g_5 = 0,000100;$ $\zeta_1 = 0,820138; \zeta_3 = 0,039942; \zeta_5 = -0,001216;$ $\lambda_k = 10^\circ$
IV.8.c	Területtartó pszeudopolikónikus vetület a teljes földfelszínre. $E \approx 0,476784$ [Hammer–Wag. $\hat{E} \approx 0,490939$]	(IV.48)	$r_1 = 0,034088; r_3 = -0,130205; r_5 = 0,632104;$ $\zeta_1 = 1,211858; \zeta_3 = 0,196386; \zeta_5 = -0,037795;$ $\lambda_k = 10^\circ$
IV.9.a	Poliazimutális vetület a Jeges-tengerre és az Északi-Atlanti-óceánra a nyílt melléktengekkel együtt. $E \approx 0,047470$ [Postel $\hat{E} \approx 0,080436$]	(IV.26, IV.51)	$r_1 = 0,981453; r_3 = 0,192024; r_5 = 0,040754;$ $g_{11} = -0,533319; g_{12} = 0,093644;$ $g_{21} = 0,065553; g_{13} = -0,009889;$ $g_{22} = -0,003168; g_{31} = -0,001749;$ $\zeta_2 = 0,081343; \zeta_4 = 0,155756; \lambda_k = -45^\circ$

Ábra	Leírás	Képletek	Együtthatók
IV.9.b	Területtartó poliazimutális vetület Antarktiszra, Ausztráliára és Új-Zélandra. $E \approx 0,039807$ [Lambert sík $\hat{E} \approx 0,067176$]	(IV.51.b, IV.52)	$\varsigma_2 = 0,032126$; $\varsigma_4 = 0,012789$; $\varphi_0 = -90^\circ$; $\lambda_k = -135^\circ$
IV.10.a	Pólusvonalas vetület a teljes földfelszínre. $E \approx 0,331532$ [Winkel III. $\hat{E} \approx 0,385118$]	(IV.28.a, IV.53)	$v_{10} = 0,896303$; $v_{30} = 0,044303$; $v_{12} = 0,024257$; $v_{50} = -0,000891$; $v_{32} = -0,018920$; $v_{14} = 0,002339$; $\xi_{01} = 0,749623$; $\xi_{03} = 0,003933$; $\xi_{21} = -0,044718$; $\xi_{05} = 0,000256$; $\xi_{23} = -0,016217$; $\xi_{41} = -0,001215$; $\lambda_k = 10^\circ$
IV.10.b	Plagális pólusíves vetület a szárazföldekre. $E \approx 0,178295$ [Baranyi IV. $\hat{E} \approx 0,466537$]	(IV.30, IV.54)	$v_{10} = 0,953736$; $v_{30} = 0,035019$; $v_{12} = 0,011811$; $v_{50} = -0,007242$; $v_{32} = -0,024326$; $v_{14} = 0,009334$; $\xi_{01} = 0,843610$; $\xi_{03} = 0,009440$; $\xi_{21} = 0,028168$; $\xi_{05} = -0,001265$; $\xi_{23} = -0,002371$; $\xi_{41} = 0,063876$; $\varphi_0 = 40^\circ$; $\lambda_0 = 170^\circ$; $\lambda_k = -140^\circ$
IV.10.c	Szakadásmentes vetület az óceánokra. $E \approx 0,472615$ [Postel $\hat{E} \approx 0,776435$]	(IV.26, IV.50, IV.55, IV.56)	$r_{10} = 0,798137$; $r_{30} = 0,003725$; $r_{50} = 0,000344$; $r_{22} = -0,041313$; $r_{32} = 0,009746$; $r_{24} = -0,004218$; $g_{12} = 0,059806$; $g_{14} = 0,015431$; $g_{22} = -0,028586$; $g_{16} = 0,010218$; $g_{24} = -0,005667$; $g_{32} = 0,002252$; $\xi = 0,950800$; $\varphi_0 = -50^\circ$; $\lambda_0 = -110^\circ$; $\lambda_k = -10^\circ$
IV.10.d	Általános torzulású vetület Kelet-Ázsiára (Kína, Mongólia, Korea, Japán). $E \approx 0,006924$ [Postel $\hat{E} \approx 0,013614$]	(IV.36, IV.57)	$r_{00} = 0,375569$; $r_{10} = 0,997630$; $r_{20} = 0,000425$; $r_{02} = -0,021030$; $r_{04} = -0,015785$; $r_{12} = 0,023562$; $g_{01} = 0,530839$; $g_{03} = -0,040916$; $g_{11} = 0,176715$; $g_{05} = 0,002616$; $g_{13} = 0,050090$; $g_{21} = -0,097878$; $\lambda_k = 105^\circ$
IV.10.e	Területtartó pólusíves vetület a teljes földfelszínre. $E \approx 0,490473$ [Hammer $\hat{E} \approx 0,582037$]	(IV.34, IV.58)	$v_1 = 1,152037$; $v_3 = 0,030833$; $v_5 = -0,092327$; $\xi_1 = 0,974263$; $\xi_3 = -0,006135$; $\xi_{05} = -0,000315$; $\lambda_k = 10^\circ$
IV.10.f	Területtartó vetület Európára. $E \approx 0,011943$ [Lambert sík $\hat{E} \approx 0,016264$]	(IV.40, IV.61)	$r_0 = -0,000314$; $r_1 = 0,918838$; $r_2 = 0,244127$; $g_1 = 1,025290$; $g_3 = -0,049790$; $g_5 = 0,011758$; $\lambda_k = 25^\circ$
IV.11.a	Szögtartó vetület Afrikára. $E \approx 0,037052$ [Sztereografikus $\hat{E} \approx 0,072570$]	(IV.62)	$\psi_1 = 0,961022$; $\psi_3 = -0,021565$; $\psi_5 = 0,030143$; $\varphi_0 = 0^\circ$; $\lambda_0 = 15^\circ$
IV.11.b	Szögtartó vetület az Európai Unióra. $E \approx 0,004939$ [Lamb.-Gauss $\hat{E} \approx 0,020721$]	(IV.62)	$\psi_1 = 0,995073$; $\psi_2 = -0,010344$; $\psi_3 = -0,012457$; $\psi_4 = -0,169851$; $\psi_5 = 0,259139$; $\varphi_0 = 50^\circ$; $\lambda_0 = 10^\circ$
V.11	Pólusíves vetület a Marsra. $E \approx 0,337538$ [Aitoff $\hat{E} \approx 0,524484$]	(IV.30, IV.54)	$v_{10} = 0,946256$; $v_{30} = -0,002902$; $v_{12} = -0,023207$; $v_{50} = 0,005308$; $v_{32} = 0,003490$; $v_{14} = 0,008052$; $\xi_{01} = 0,728015$; $\xi_{03} = 0,011535$; $\xi_{21} = 0,092602$; $\xi_{05} = -0,000241$; $\xi_{23} = -0,022707$; $\xi_{41} = 0,074126$
V.12	Ferde transzverzális képzetes síkvetület az Atlanti-óceánra. $E \approx 0,043231$ [Postel $\hat{E} \approx 0,106258$]	(IV.26, IV.50)	$r_1 = 0,991659$; $r_3 = -0,000305$; $r_5 = 0,000723$; $g_{12} = -0,203729$; $g_{14} = 0,045344$; $g_{22} = 0,138529$; $g_{16} = -0,010864$; $g_{24} = -0,008846$; $g_{32} = -0,036172$; $\varphi_0 = 0^\circ$; $\lambda_0 = -30^\circ$; $\lambda_k = 25^\circ$

Felhasznált irodalom

- AIRY, George B. (1861): „Explanation of a projection by balance of errors for maps applying to a very large extent of the earth's surface; and comparison of this projection with other projections”. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **22**/149, 409–421. old.
- ALBERT Gáspár – ILYÉS Virág – KIS Dávid – SZIGETI Csaba – VÁRKONYI Dávid (2016): „Testing The Map Reading Skills of University Students”. *Proceedings of the 6th International Conference on Cartography and GIS*. Szerk. Темеужка Бандрова – Milan Konečný. Albena, Bulgária, 188–199. old. URL: <https://cartography-gis.com/docsbca/iccgis2016/ICCGIS2016-19.pdf>
- ALBINUS, Hans-Joachim (1981): „Anmerkungen und Kritik zur Entfernungsverzerrung”. *Kartographische Nachrichten* **31**/5, 179–183. old.
- ANDERSON, Kathleen C. – Gaea LEINHARDT (2002): „Maps as Representations: Expert Novice Comparison of Projection Understanding”. *Cognition and Instruction* **20**/3, 283–321. old. DOI: [10.1207/S1532690XCI2003_1](https://doi.org/10.1207/S1532690XCI2003_1)
- [BAJEVA] Е. Ю. Баева (1987): „Критерии оценки достоинства картографических проекций, используемых для составления карт Мира”. *Геодезия и аэрофотосъёмка* **3**, 109–112. old.
- BARANYI János (1987): „Konstruktion anschaulicher Erdabbildungen”. *Kartographische Nachrichten* **37**/1, 11–17. old.
- BATTERSBY, Sarah E. – Daniel R. MONTELLO (2009): „Area Estimation of World Regions and the Projection of the Global-Scale Cognitive Map”. *Annals of the Association of American Geographers* **99**/2, 273–291. old. DOI: [10.1080/00045600802683734](https://doi.org/10.1080/00045600802683734)
- BÖHM, Rolf (é. n.): *Einen Kartennetzentwurf mit dem Direkttransformator rechnen*. Utolsó elérés: 2018. jan. 4. URL: http://www.reliefschummerung.de/rs_tu_27_geo_direct_projection.html

- BÖHM, Rolf – Wolf G. KOCH – Werner STAMS (2017): „Erdabbildung in neuer Form — Eine Betrachtung zu Hajime Narukawas Weltkarte”. *Kartographische Nachrichten* **67**/3, 117–121. old.
- BUTLER, Howard és mások (2008): *The GeoJSON format specification*. Szakm. jel. Internet Engineering Task Force
- CANTERS, Frank (2002): *Small-scale map projection design*. London: Taylor & Francis
- ČAPEK, Richard (2001): „Which Is the Best Projection for the World Map?”: *Proceedings of the 20th International Cartographic Conference*. 5. köt. Peking, 3084–3093. old. URL: http://icaci.org/files/documents/ICC_proceedings/ICC2001/icc2001/file/f24014.pdf
- CHAMBERLAIN, Robert G. – William H. DUQUETTE (2007): „Some algorithms for polygons on a sphere”. *Association of American Geographers Annual Meeting, San Francisco, California, 2007*. Pasadena, CA: Jet Propulsion Laboratory, National Aeronautics és Space Administration. URL: <http://hdl.handle.net/2014/41271>
- [CSEBISEV] Пафнутий Л. Чебышёв (1856): „Sur la construction des cartes géographiques”. *Bulletin de la classe physiq.-math de l’Acad. des Sciences* **14**, 257–261. old.
- FÁBIÁNNÉ MERK Zsófia – SZABÓ Bence – SZABÓ Miklós – NAGY Áron (Szerk.) (2016): „Földrajzi atlasz középiskolásoknak”. Átdolgozott kiadás. Budapest: Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet. Magyar Közlöny Lap- és Könyvkiadó Kft., 48–65. old. ISBN: 978-963-436-004-9
- FIDY Judit – MAKARA Gábor (2005): *Biostatisztika*. InforMed 2002 Kft. URL: <http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tkt/biostatisztika-1>
- FISHER, Irving – Osborn M. MILLER (1944): *World maps and globes*. New York: Essential Books
- FRANČULA, Nedjeljko (1971): „Die vorteilhaftesten Abbildungen in der Atlas-kartographie”. PhD dissz. Reinischen Friedrich Wilhelms Universität, Hohen Landwirtschaftlichen Fakultät
- [GINZBURG – SZALMANOVA] Г. А. Гинзбург – Т. Д. Салманова (1957): *Атлас для выбора картографических проекций*. Труды ЦНИИГАиК 110. Москва: Геодезиздат

- GOLDBERG, David M. – J. Richard GOTT III (2007): „Flexion and skewness in map projections of the Earth”. *Cartographica: The International Journal for Geographic Information and Geovisualization* **42**/4, 297–318. old. DOI: [10.3138/carto.42.4.297](https://doi.org/10.3138/carto.42.4.297)
- GOTT III, J. Richard – Charles MUGNOLO – Wesley N. COLLEY (2007): „Map Projections Minimizing Distance Errors”. *Cartographica: The International Journal for Geographic Information and Geovisualization* **42**/3, 219–234. old. DOI: [10.3138/carto.42.3.219](https://doi.org/10.3138/carto.42.3.219)
- GRAFAREND, Erik W. – A. NIERMANN (1984): „Beste echte Zylinderabbildungen”. *Kartographische Nachrichten* **34**/3, 103–107. old.
- GYÖRFFY János (1990): „Anmerkungen zur Frage der besten echten Zylinderabbildungen”. *Kartographische Nachrichten* **40**/4, 140–146. old.
- „ — (2002): „Rectangular pseudopolyconic projection for geographical maps”. *Studia Cartologica* 12. Szerk. Klinghammer István. Budapest: ELTE Eötvös Kiadó. ISBN: 963–463–540–7. URL: <http://lazarus.elte.hu/hun/digkonyv/sc/sc12/01gyj.pdf>
- „ — (2012): *Térképészet és geoinformatika II. Térképvetületek*. Budapest: ELTE Eötvös Kiadó
- „ — (2016): „Some Remarks on the Question of Pseudocylindrical Projections with Minimum Distortions for World Maps”. *Progress in Cartography: EuroCarto 2015*. Szerk. Georg Gartner – Markus Jobst – Haosheng Huang. Springer International Publishing, 253–265. old. ISBN: 978–3–319–19602–2. DOI: [10.1007/978-3-319-19602-2_16](https://doi.org/10.1007/978-3-319-19602-2_16)
- GYÖRFFY János – KLINGHAMMER István (2004): „Die kleinmaßstäbige Darstellung von Europa in Projektionen geringster Verzerrung – die Basis für einen Europa-Atlas”. *Kartographische Nachrichten* **54**/6, 262–268. old.
- HIRTLE, Stephen C. – John JONIDES (1985): „Evidence of hierarchies in cognitive maps”. *Memory & Cognition* **13**/3, 208–217. old. ISSN: 1532–5946. DOI: [10.3758/BF03197683](https://doi.org/10.3758/BF03197683)
- HRUBY, Florian – Mónica Ch. AVELINO – Raymundo M. AYALA (2016): „Journey to the End of the World Map – How Edges of World Maps Shape the Spatial Mind”. *GI_Forum* 2016. 1. köt., 314–323. old. DOI: [10.1553/giscience2016_01_s314](https://doi.org/10.1553/giscience2016_01_s314)

- İPBÜKER, Cengizhan – İbrahim Ö. BİLDİRİCİ (2002): „A general algorithm for the inverse transformation of map projections using jacobian matrices”. *Proceedings of the Third International Symposium Mathematical & Computational Applications*. Konya, Törökország, 175–182. old.
- JENNY, Bernhard – Bojan ŠAVRIČ – Johannes LIEM (2016): „Real-time raster projection for web maps”. *International Journal of Digital Earth* 9/3, 215–229. old. DOI: [10.1080/17538947.2014.1002867](https://doi.org/10.1080/17538947.2014.1002867)
- JUHÁSZ Péter (2008): „Magyarországi topográfiai térképek vetületének vizsgálata”. PhD dissz. Eötvös Loránd Tudományegyetem, Térképtudományi és Geoinformatikai Tanszék
- KACZMARCZYK, Grzegorz (é. n.): *Downhill Simplex Method for Many (~20) Dimensions*. Utolsó elérés: 2002. márc. 16. URL: <http://paula.univ.gda.pl/~dokgrk/simplex.html>
- [КАВРАJSZKIJ] Владимир В. Каврайский (1934): *Математическая картография*. Москва–Ленинград: Редбаза Госкартотреста
- KEPLER, Johannes (1615): *Nova stereometria doliorum vinariorum*. Linz: Johannes Plancus
- KERKOVITS Krisztián (2016): „Handling Boundary Cuts while Reprojecting GIS Vector Data”. *Proceedings of the 6th International Conference on Cartography and GIS*. Szerk. Темеужка Бандрова – Milan Konečný. Albena, Bulgária, 351–360. old. URL: <https://cartography-gis.com/docsbca/iccgis2016/ICCGIS2016-36.pdf>
- „ — (2017a): „Legjobb valódi hengervetület nagy területek ábrázolására”. *Geodézia és Kartográfia* 69/3, 29–32. old.
- „ — (2017b): „Vorteilhafteste flächentreue Kegellentwürfe für unregelmäßig begrenzte Gebiete”. *Kartographische Nachrichten* 67/3, 122–128. old.
- KERKOVITS Krisztián – GEDE Mátyás (2017): „Web-based Decision Support Sytem for Choosing the Appropriate Map Projection”. *The 28th International Cartographic Conference*
- KIMERLING, Jon A. – Scott W. OVERTON – Denis WHITE (1995): „Statistical Comparison of Map Projection Distortions Within Irregular Areas”. *Cartogra-*

- phy and Geographic Information Systems* **22**/3, 205–221. old. DOI: [10.1559/152304095782540348](https://doi.org/10.1559/152304095782540348)
- KIRKWOOD, Thomas B. L. (1979): „Geometric Means and Measures of Dispersion”. *Biometrics* **35**/4, 908–909. old. ISSN: 0006341X,15410420. URL: <http://www.jstor.org/stable/2530139>
- KLINGHAMMER István (2015): „A kartográfia alapjairól: a térképvetületek kezdetei”. *Geodézia és Kartográfia* **67**/7–8, 14–19. old.
- KÓSA András (1970): *Variációszámítás*. Tankönyvkiadó
- LASKOWSKI, Peter (1997): „The distortion spectrum”. *Cartographica: The International Journal for Geographic Information and Geovisualization* **34**/3
- LEE, Laurence P. (1976): *Conformal Projections Based on Elliptic Functions*. Toronto: York University
- LORENZ, Ronny (2015). *MarchingSquaresJS* (függvénykönyvtár). Utolsó elérés: 2016. máj. 10. URL: <https://github.com/RaumZeit/MarchingSquares.js>
- MÁRTON Mátyás (2012): *A Világtenger kartográfus szemmel*. Eötvös Loránd Tudományegyetem
- [MEJ – Hszü N. – Hszü L.] MEI Gang – XU Nengxiong – XU Liangliang (2016): „Improving GPU-accelerated adaptive IDW interpolation algorithm using fast kNN search”. *SpringerPlus* **5**/1, 1389. old. ISSN: 2193–1801. DOI: [10.1186/s40064-016-3035-2](https://doi.org/10.1186/s40064-016-3035-2)
- [MESCERJAKOV] Герман А. Мещеряков (1968): *Теоретические основы математической картографии*. Москва: Недра
- MULCAHY, Karen A. – Keith C. CLARKE (2001): „Symbolization of Map Projection Distortion: A Review”. *Cartography and Geographic Information Science* **28**/3, 167–182. old. DOI: [10.1559/152304001782153044](https://doi.org/10.1559/152304001782153044)
- NELDER, John A. – Robert MEAD (1965): „A Simplex Method for Function Minimization”. *The Computer Journal* **7**/4, 308–313. old. DOI: [10.1093/comjnl/7.4.308](https://doi.org/10.1093/comjnl/7.4.308)
- [NIRCOV] Максим В. Нырцов (2017): „Conic projections of the triaxial ellipsoid: The projections for regional mapping of celestial bodies”. *The 28th International Cartographic Conference*
- [OPENLAYERS] (2018). *OpenLayers 4.6.4* (függvénykönyvtár). Utolsó elérés: 2018. márc. 12. URL: <https://openlayers.org/>

- PETERS, Aribert B. (1975): „Wie man unsere Weltkarten der Erde ähnlicher machen kann”. *Kartographische Nachrichten* **25**/5, 173–183. old.
- PRESS, William H. (2002): *Numerical recipes in C: the art of scientific computing*. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press
- REYES Nuñez, José Jesús (2012): „The first National Atlas of Cuba: Rediscovering the early 20th century country”. *Symposium on Discovery, Exploration, Cartography*
- SAKSHUWONG, Sukolsak – Gabor ANGELI (é. n.): „Adaptive Composite Map Projections in D3”. Utolsó elérés: 2015. nov. 23. URL: http://web.stanford.edu/~sukolsak/projects/cs448b_final_paper.pdf
- SAPUAN, Fazli – Matthew SAW – Julia LOW – Eugene CHEAH (2016): *gpu.js — GPU Accelerated JavaScript*. Utolsó elérés: 2018. jan. 8. URL: <http://gpu.rocks/>
- ŠAVRIČ, Bojan – Bernhard JENNY – Denis WHITE – Daniel R. STREBE (2015): „User preferences for world map projections”. *Cartography and Geographic Information Science* **42**/5, 398–409. old. DOI: [10.1080/15230406.2015.1014425](https://doi.org/10.1080/15230406.2015.1014425)
- SHEPARD, Donald (1968): „A Two-dimensional Interpolation Function for Irregularly-spaced Data”. *Proceedings of the 1968 23rd ACM National Conference*. ACM '68. New York: ACM, 517–524. old. DOI: [10.1145/800186.810616](https://doi.org/10.1145/800186.810616)
- SNYDER, John P. (1985): *Computer-assisted map projection research*. 1629. köt. US Government Printing Office. URL: <http://pubs.er.usgs.gov/publication/b1629>
- „ — (1987): *Map projections — A working manual*. 1395. köt. Washington: US Government Printing Office. URL: <http://pubs.er.usgs.gov/publication/pp1395>
- STEINWAND, Daniel R. – John A. HUTCHINSON – John P. SNYDER (1995): „Map projections for global and continental data sets and an analysis of pixel distortion caused by reprojection”. *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing* **61**/12, 1487–1497. old. URL: <http://pubs.er.usgs.gov/publication/70187049>
- [SZERAPINASZ] Балис Б. Серапинас (2005): *Математическая картография*. Высшее профессиональное образование. Москва: Academia. ISBN: 5 – 7695 – 2131–7

- SZIGETI Csaba – KERKOVITS Krisztián (2018): „A vetületválasztás hatása kis méretarányú térképek olvasására”. *Geodézia és Kartográfia* **70/2**, 20–31. old. DOI: [10.30921/GK.70.2018.2.3](https://doi.org/10.30921/GK.70.2018.2.3)
- TISSOT, Auguste (1878): „Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques”. *Nouvelles annales de mathématiques, journal des candidats aux écoles polytechnique et normale* **17**, 145–163. old.
- TOBLER, Waldo R. (1964): *Geographical coordinate computations. Part II. Finite map projection distortions*. Ft. Belvoir: Defense Technical Information Center
- [TOLSZTOVA] Т. И. Толстова (1969): „Критерий Эйри в применении к азимутальным проекциям”. *Геодезия и аэрофотосъёмка* **6**, 115–118. old.
- TOMICK, John J. (1995): „On convergence of the Nelder-Mead simplex algorithm for unconstrained stochastic optimization”. PhD dissz. The Pennsylvania State University, Department of Statistics
- TUTIĆ, Dražen (2009): „Optimalne konformne polinomne projekcije za Hrvatsku po Airy/Jordanovom kriteriju”. *Kartografija i geoinformacije* **8/11**, 49–67. old.
- [WAKABAYASHI] WAKABAYASHI Yoshiki (2013): „Role of geographic knowledge and spatial abilities in map reading process: Implications for geospatial thinking”. *Geographical reports of Tokyo Metropolitan University* **48**, 37–46. old. ISSN: 0386-8710. URL: <https://ci.nii.ac.jp/naid/120005305791/en/>
- [WOLFRAM MATHEMATICA] (2017). Mathematica 11.2. Wolfram Research Inc. Champaign, IL. URL: <https://sandbox.open.wolframcloud.com/>
- WRAY, Thomas (1974): *The Seven aspects of a general map projection*. Toronto: York University

Összefoglalás

Az értekezés a kis méretarányú térképek számára dolgoz ki alacsony torzulású vetületeket. Az első fejezet áttekintette, hogy hogyan lehet egy vetület torzító hatását számszerűsíteni. A szakirodalom átfogó vizsgálatával áttekintő képet adott különböző lehetséges szemléletmódokról. Megállapítottam, hogy ezek közül az Airy – Kavrajszkij-kritérium fejezi ki matematikailag megalapozottan a gömbi és a síkbeli ábrázolás között tapasztalt alakváltozás mértékét; ezt a harmadik fejezetben numerikus számítások is megerősítették.

Megvizsgáltuk, hogy a vetületi torzulások mennyire határozzák meg a térképolvasást, és azt tapasztaltuk, hogy különösen a kevésbé tapasztalt, jellemzően fiatal célközönség számára van nagy jelentősége egy kedvező torzulású ábrázolásnak.

Áttekintést adtam a vetületeptimalizálásra fölhasználható numerikus módszerekről. A Simpson-szabály továbbfejlesztésével a torzultságot bármilyen gömbi sokszög területére sikerült reprodukálható módon tetszőleges pontossággal közelíteni.

A vetületcsaládokon végighaladva sorra olyan általános vetületi egyenleteket írtam le, melyekkel a legkisebb torzulású vetület megfelelő számítási kapacitás meglete esetén tetszőleges pontossággal közelíthető. Az optimalizálási tapasztalatok nem mondtak ellent a vetülettanban régóta ismert hagyományos vetületválasztási tanácsoknak.

Az elkészült vetületek GIS-rendszerekben történő alkalmazhatósága céljából komoly erőfeszítéseket kellett tenni. A vektoros állományok esetében a vetületi szakadások mentén, míg a raszteres adatsorok esetében a zárt alakban kifejezhető inverzzel nem rendelkező vetületekben jelentkező nehézségekre adtam megoldást.

Végezetül egy konkrét tematikus térkép példáján láttuk, hogy az elért eredmények hogyan alkalmazhatók a kartográfia területén.

Summary

Optimising Distortions in Projections for Geographical Maps

In this dissertation, low-distortion projections are developed for small-scale maps. In the first chapter, distortion measures proposed in the literature are reviewed to quantify the overall distortion effect of a map projection. After examining different approaches and getting a comprehensive view of various formulae, it turned out that the Airy–Kavraysky criterion expresses the difference between the spherical and the planar objects in a mathematically correct way. Numeric calculations also confirmed this statement.

Effects of distortions on the map usability were also considered, and results implied that the choice of a projection with favourable distortions is especially important for a less experienced and younger audience.

This study gives an overview of numerical methods appropriate for gaining optimal projections. By the development of Simpson’s rule, the distortion over any spherical polygon can be approximated to any desired accuracy in a reproducible manner.

General projection equations are obtained for each projection class in order to be able to approximate the optimal projection with any accuracy provided by the available computational capacity. Experiments with projections gained in such a way did not contradict traditional and any formerly known advice regarding the selection of map projections.

Implementation of the resulting projections to GIS systems needed serious efforts. This work provides solutions for problems arising along boundary cuts when handling vector data. For raster data, a workaround is described to make it possible to use projections lacking an analytical inverse.

The study concludes with an example of a thematic map demonstrating how these achievements are applicable in the field of cartography.

ADATLAP

a doktori értekezés nyilvánosságra hozatalához*

I. A doktori értekezés adatai

A szerző neve: Kerkovits Krisztián András

MTMT-azonosító: 10055168

A doktori értekezés címe és alcíme: Vetületi torzulások optimalizálása földrajzi térképeken

DOI-azonosító⁴⁶: 10.15476/ELTE.2018.097

A doktori iskola neve: ELTE TTK Földtudományi Doktori Iskola

A doktori iskolán belüli doktori program neve: Térképészet Doktori Program

A témavezető neve és tudományos fokozata: Dr. Klinghammer István, DSc

A témavezető munkahelye: ELTE IK Térképtudományi és Geoinformatikai Tanszék

II. Nyilatkozatok

1. A doktori értekezés szerzőjeként

a) hozzájárulok, hogy a doktori fokozat megszerzését követően a doktori értekezésem és a tézisek nyilvánosságra kerüljenek az ELTE Digitális Intézményi Tudástárban. Felhatalmazom a Természettudományi kar Dékáni Hivatal Doktori, Habilitációs és Nemzetközi Ügyek Csoportjának ügyintézőjét, hogy az értekezést és a téziseket feltöltse az ELTE Digitális Intézményi Tudástárba, és ennek során kitöltse a feltöltéshez szükséges nyilatkozatokat.

b) kérem, hogy a mellékelt kérelemben részletezett szabadalmi, illetőleg oltalmi bejelentés közzétételéig a doktori értekezést ne bocsássák nyilvánosságra az Egyetemi Könyvtárban és az ELTE Digitális Intézményi Tudástárban;

c) kérem, hogy a nemzetbiztonsági okból minősített adatot tartalmazó doktori értekezést a minősítés (dátum)-ig tartó időtartama alatt ne bocsássák nyilvánosságra az Egyetemi Könyvtárban és az ELTE Digitális Intézményi Tudástárban;

d) kérem, hogy a mű kiadására vonatkozó mellékelt kiadó szerződésre tekintettel a doktori értekezést a könyv megjelenéséig ne bocsássák nyilvánosságra az Egyetemi Könyvtárban, és az ELTE Digitális Intézményi Tudástárban csak a könyv bibliográfiai adatait tegyék közzé. Ha a könyv a fokozatszerzést követően egy évig nem jelenik meg, hozzájárulok, hogy a doktori értekezésem és a tézisek nyilvánosságra kerüljenek az Egyetemi Könyvtárban és az ELTE Digitális Intézményi Tudástárban.

2. A doktori értekezés szerzőjeként kijelentem, hogy

a) az ELTE Digitális Intézményi Tudástárba feltöltendő doktori értekezés és a tézisek saját eredeti, önálló szellemi munkám és legjobb tudomásom szerint nem sértem vele senki szerzői jogait;

b) a doktori értekezés és a tézisek nyomtatott változatai és az elektronikus adathordozón benyújtott tartalmak (szöveg és ábrák) mindenben megegyeznek.

3. A doktori értekezés szerzőjeként hozzájárulok a doktori értekezés és a tézisek szövegének plágiumkereső adatbázisba helyezéséhez és plágiumellenőrző vizsgálatok lefuttatásához.

Kelt: Budapest, 2018. május 28.

.....
a doktori értekezés szerzőjének aláírása

*ELTE SZMSZ SZMR 12. sz. melléklet